Inspectoratul Şcolar Judeţean Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-12 februarie 2011

Clasa a IX a

Subiecte

1. Fie şirul $(x_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$ de numere reale dat prin relaţia $x_n = \dfrac{p\,x_{n-1} + x_{n+1}}{p+1}$, oricare ar fi $n\geq 2$, $n\in \mathbf{N}$.

a. Să se arate că termenul general al şirului este

$x_n = x_1 + \left(1 + p + p^2 + ... + p^{n-2}\right)(x_2 - x_1)$, oricare ar fi $n\in \mathbf{N}^*$.

b. Să se arate că :

$x_n = \dfrac{p\,x_{n-1} + x_{n+1}}{p+1}$, oricare ar fi $n\geq 2$, $n\in \mathbf{N}^*$ dacă si numai dacă

$\dfrac{1}{x_1x_2} + \dfrac{p}{x_2x_3} + \dfrac{p^2}{x_3x_4} + ... + \dfrac{p^{n-1}}{x_nx_{n+1}} = \dfrac{1 + p + p^2 + ... + p^{n-1}}{x_1x_{n+1}}$, oricare ar fi $n\geq 1$, $n \in \mathbf{N}$.

Prof Gabriel Necula, Plopeni

2. Fie a, b Є **N***, (a,b) = 1, astfel încât $a < 2b\sqrt{2}$.

a. Demostraţi că $8b^2 \geq a^2+4$.

b. Arătaţi că $2ab\sqrt{2} > a^2+1$

Prof Petre Năchilă şi Cătălin Năchilă, Ploieşti

3. Fie patrulaterul $ABCD$, H_1 - ortocentrul ΔABC si H_2 - ortocentrul ΔDBC. Să se demonstreze că $ABCD$ este inscriptibil dacă şi numai dacă $H_1H_2 \parallel AD$.

Prof Claudiu Militaru, Ploieşti

4. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi punctele M Є (BC), N Є AC, P Є AB astfel încât vectorii $\vec{AM}, \vec{BN}, \vec{CP}$ să fie coliniari.

Arătaţi că suma $\dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{BN^2} + \dfrac{1}{CP^2}$ este constantă.

***

SUCCES!

<u>Notă:</u>

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Şcolar Judeţean Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-12 februarie 2011

Clasa a X a

Subiecte

1. Fie funcţia $f:R^* \to R$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ şi *a, b* Є R^*, $a = \log_{2010}2009$ şi $b = \log_{2010}2011$.Comparaţi valorile funcţiei f în *a* şi *b*.

Prof Alexandru Diţei , Breaza

2.

a)Sa se arate ca numarul $a = \sqrt[3]{\sqrt{50}+7} - \sqrt[3]{\sqrt{50}-7}$ este numar natural;

b)Sa se rezolve in multimea numerelor complexe ecuatiile:

i) $x^3 + 3x - 14 = 0$;

ii) $x^3 + 3x - 2n = 0 \quad (n \in N^*)$.

Prof Apostolescu Cezar, Ploieşti

3. Se consideră în plan punctele A(*x*), B(*y*), C(*z*), *x, y, z* Є **C.** Determinaţi aria triunghiului ABC, ştiind că $|x| = |y| = |z| = m$, mЄ $\mathbf{R}^*_+$ şi $m^2(x+y+z) = xyz$ Є **R.**

Prof Petre Năchilă şi Cătălin Năchilă, Ploieşti

4. Fie A= { *z* Є **C *I** Re*z*,Im *z* Є **Z,** I*z*I < 3}.Determinaţi cel mai mic *k* Є **N*,** astfel încât, în orice mulţime B inclusă în A, card B= *k* , să existe numere cu suma zero.

Prof Emil Vasile, Ploieşti

.

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Şcolar Judeţean Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-12 februarie 2011

Clasa a XI- a

Subiecte

1. Fie $A \in M_2(\mathbf{R})$ astfel încât $trA \neq 0$ şi $\det A \neq 0$.
   (i) Să se arate că funcţia $f : M_2(\mathbf{R}) \to M_2(\mathbf{R})$, $f(X) = AX + XA$ este bijectivă.
   (ii) Să se determine toate matricele $X \in M_2(\mathbf{R})$ care verifică egalitatea :
   $A(AX + XA) + (AX + XA)A = A(AX^2 + X^2A) + (AX^2 + X^2A)A$.

Prof.Necula Gabriel,Plopeni

2. Fie sirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_{n+1} = \dfrac{4022x_n}{2011+x_n^2}$, $\forall n \geq 1$, $x_1 = \sqrt{2012}$. Demonstrati ca sirul este convergent si calculati $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Prof. Militaru Claudiu,Ploiesti

3. Fie sirul $(D_n)_{n\geq 1}$ unde $D_n = \begin{vmatrix} n! & (n+1)! & (n+2)! \\ (n+3)! & (n+4)! & (n+5)! \\ (n+6)! & (n+7)! & (n+8)! \end{vmatrix}$

   a)Calculati D_n

   b)Fie $t_n = \dfrac{D_{n-1}}{D_n}, n \geq 1$.Calculati $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} t_{3k}$

Prof. Emil Vasile,Ploiesti

4. Fie matricele $A,B \in M_n(\mathbf{R})$, $n\geq 2$ asfel incat $AB+\varepsilon A+\varepsilon^2 B=O_n$ unde $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1=0$.Sa se arate ca $AB=BA$

Gazeta Matematica

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Şcolar Judeţean Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-12 februarie 2011

Clasa a XII- a

Subiecte

1. Fie G=[0,1) definim legile de compozitie
   $x*y=\{x+y\}$; x τ y=0,3 $*\,x*y$; xoy=0,7 $*\,x*y$ unde {x} reprezinta partea fractionara a numarului x
   a)Sa se arate ca (G, *) este grup abelian
   b)Sa se arate ca (G, τ) si (G, o) sunt grupuri abeliene izomorfe

***

2.Sa se calculeze $\int\left(\frac{arctgx}{arctgx-x}\right)^2 dx, x\in(0,\infty)$.

Prof. Vasile Coman,Valenii de Munte

3.Fie (G,·) un grup finit de n elemente(n∈ ℕ, n≥2), de element neutru e, astfel incat x^3=e, ∀x∈G

a) Sa se arate ca 6 **|** (n-3)

b) Dati un exemplu de grup cu proprietatea din enunt, cu 9 elemente

Prof Cezar Apostolescu,Ploiesti

4. Fie f: **R** → [-a,a], a>0 o functie continua. Sa se arate ca :

$$\sqrt{7}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-f^2(x)}dx+3\int_{-a}^{a}f(x)dx\le 8a^2$$

Gazeta Matematica

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10