## *A 62-a Ediție a Olimpiadei Naționale de Matematică*
## *Etapa locală Dâmbovița - 12 Februarie 2011*

# CLASA A IX-A

**Subiectul 1.** Fie $V, W$ mulțimi infinite de numere întregi având proprietatea că pentru orice $x, y \in V$, avem $x - y \in V$ și pentru orice $z, t \in W$, avem $z - t \in W$. Demonstrați că există $a_1, a_2 \in V$ și $b_1, b_2 \in W$ astfel încât $a_1 - a_2 = b_1 - b_2 \neq 0$.

**Cristinel Mortici**

**Subiectul 2.** Pentru fiecare $n = 1,2,3, \dots$, notăm cu $a_n$ și $b_n$ suma numerelor pare, respectiv suma numerelor impare din intervalul $[n^2 - n + 1, n^2 + n + 1]$. Câte elemente are mulțimea

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid \left| \frac{a_n}{b_n} - 1 \right| > \frac{1}{2011} \right\} ?$$

**Cristian Grecu**

**Subiectul 3.** Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică de rație $r > 0$, cu $a_1 = r$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ o progresie geometrică de rație $q > 1$, cu $b_1 = q$. Demonstrați că dacă $r = q - 1$, atunci

$$\sqrt{\frac{a_1}{b_1}} + \sqrt{\frac{a_2}{b_2}} + \cdots + \sqrt{\frac{a_n}{b_n}} < \sqrt{1 + 2 + \cdots + n}\,, \quad \text{oricare ar fi } n = 1,2,3, \dots \,.$$

**Dinu Teodorescu**

**Subiectul 4.** Se consideră un triunghi $ABC$, un punct $M$ în planul său și notăm cu $G_A, G_B, G_C$ centrele de greutate ale triunghiurilor $BMC, CMA, AMB$. Arătați că vectorii $\overrightarrow{AG_A}, \overrightarrow{BG_B}, \overrightarrow{CG_C}$ formează un triunghi dacă și numai dacă $M$ este centrul de greutate al triunghiului $ABC$.

**Florin Stănescu**

*A 62-a Ediție a Olimpiadei Naționale de Matematică*
*Etapa locală Dâmbovița - 12 Februarie 2011*

# CLASA A IX-A – BAREM DE EVALUARE

## Subiectul 1

**(2 puncte)** $0 \in V$ și $0 \in W$

**(1 punct)** Dacă $x \in V$ și $z \in W$, atunci $-x \in V$ și $-z \in W$

**(1 punct)** Dacă $x, y \in V$ și $z, t \in W$, atunci $x + y \in V$ și $z + t \in W$

**(1 punct)** Există $a \in V, a > 0$ și $b \in W, b > 0$

**(1 punct)** $ab = a + a + \cdots + a \in V$ și $ab = b + b + \cdots + b \in W$

**(1 punct)** $ab - 0 = ab - 0 \neq 0$

## Subiectul 2

**(1 punct)** Numerele pare sunt $n^2 - n + 2, n^2 - n + 4, \ldots, n^2 + n$

**(1 punct)** Numerele impare sunt $n^2 - n + 1, n^2 - n + 3, \ldots, n^2 + n + 1$

**(1 punct)** $a_n = n(n^2 + 1)$

**(1 punct)** $b_n = (n + 1)(n^2 + 1)$

**(1 punct)** $\left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$

**(1 punct)** Obține $n < 2010$

**(1 punct)** Mulțimea $A$ are $2009$ elemente

## Subiectul 3

**(1 punct)** $a_n = nr$

**(1 punct)** $b_n = q^n$

**(2 puncte)** $\left(\sqrt{\frac{a_1}{b_1}} + \sqrt{\frac{a_2}{b_2}} + \cdots + \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right)^2 \leq (a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{b_1} + \cdots + \frac{1}{b_n}\right)$

**(1 punct)** $a_1 + \cdots + a_n = r(1 + \cdots + n)$

**(1 punct)** $\frac{1}{b_1} + \cdots + \frac{1}{b_n} = \frac{1}{q-1}\left(1 - \frac{1}{q^n}\right)$

**(1 punct)** $\frac{1}{b_1} + \cdots + \frac{1}{b_n} < \frac{1}{q-1}$ și finalizare

## Subiectul 4

**(2 puncte)** Scrie relația $3\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$

**(1 punct)** Trei vectori formează un triunghi dacă și numai dacă suma lor este vectorul nul

**(2 puncte)** $\overrightarrow{AG_A} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$, etc

**(1 punct)** $\sum \overrightarrow{AG_A} = \vec{0}$ dacă și numai dacă $\sum \overrightarrow{AM} = \vec{0}$

**(1 punct)** $\sum \overrightarrow{AM} = \vec{0}$ dacă și numai dacă $\overrightarrow{GM} = \vec{0}$, deci $G = M$

## *A 62-a Ediție a Olimpiadei Naționale de Matematică*
## *Etapa locală Dâmbovița - 12 Februarie 2011*

# CLASA A X-A

**Subiectul 1.** a) Rezolvați ecuația $9^x + 10^x = 4^x + 15^x$
b) Demonstrați inegalitatea $\log_3(\log_3 5) + \log_5(\log_5 7) + \log_7(\log_7 3) > 0$.

*** * ***

**Subiectul 2.** Determinați numerele naturale $x, y$ și numărul prim $p$, știind că

$$x^3 + x = p^y + 2.$$

**Florin Stănescu**

**Subiectul 3.** Fie $a, b, c \in \mathbb{C}$ astfel încât $|a| = |b| = |c| = 1$ și $a^2 + b^2 + c^2 = 0$. Demonstrați că dacă $a + b + c \neq 0$, atunci $|a + b + c| = 2$.

*** * ***

**Subiectul 4.** Fie funcția $f: (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin formula $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$. Demonstrați că pentru orice $p, q \in [0,1]$ cu $p + q = 1$ și $x, y \in (-1, \infty)$, avem $f(px + qy) \leq pf(x) + qf(y)$.

**Florin Stănescu**

*A 62-a Ediție a Olimpiadei Naționale de Matematică*
*Etapa locală Dâmbovița - 12 Februarie 2011*

## CLASA A X-A – BAREM DE EVALUARE

### Subiectul 1

**(2 puncte)** $(3^x - 2^x)(3^x + 2^x - 5^x) = 0$
**(2 puncte)** $x = 0$ și $x = 1$
**(1 punct)** $\log_3(\log_3 5) > \log_7(\log_3 5)$
**(1 punct)** $\log_5(\log_5 7) > \log_7(\log_5 7)$
**(1 punct)** Finalizare

### Subiectul 2

**(2 puncte)** $p$ este număr prim par, deci $p = 2$
**(1 punct)** $x - 1 = 2^m$ și $x^2 + x + 2 = 2^n$
**(2 puncte)** Elimină $x$ și obține $m \in \{0,1,2\}$
**(1 punct)** Obține $m = 0, x = 2, y = 3$
**(1 punct)** Obține $m = 2, x = 5, y = 7$

### Subiectul 3

**(2 puncte)** $(a + b + c)^2 = 2(ab + bc + ca)$
**(2 puncte)** $|a + b + c| = \left|\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}\right|$
**(3 puncte)** $\left|\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}\right| = |ab + bc + ca|$ și finalizare

### Subiectul 4

**(2 puncte)** Înlocuirea funcției $f$
**(5 puncte)** Finalizare

***A 62-a Ediție a Olimpiadei Naționale de Matematică***
***Etapa locală Dâmbovița - 12 Februarie 2011***

## CLASA A XI-A

**Subiectul 1.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ două șiruri de numere reale strict pozitive astfel încât

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n^3}{b_n^2}+\frac{b_n^3}{a_n^2}\right)=0.$$

Arătați că: a) Şirul $(a_n b_n)_{n\geq 1}$ converge la zero; b) Şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ converg la zero.

**Dinu Teodorescu**

**Subiectul 2.** Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale astfel încât șirul $(x_{2n})_{n\geq 1}$ converge către $1$, iar șirul $(x_{2n-1})_{n\geq 1}$ converge către $-1$. Demonstrați că șirul $y_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ este divergent, iar șirul $z_n = y_n/n$ este convergent.

**Cristinel Mortici**

**Subiectul 3.** Fie $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție. Demonstrați că

$$\lim_{n\to\infty}\left(f\left(\frac{1}{\ln n}\right)+f\left(\frac{1}{2\ln n}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\ ,$$

în ipoteza că limita din dreapta există, finită sau nu. **Cristinel Mortici**

**Subiectul 4.** a) Fie $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr} X \cdot \operatorname{tr} Y$. Demonstrați că

$$\det(X+Y)=\det X+\det Y.$$

b) Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\det[(A+B)^2] = \det(A^2 + 2AB + B^2)$.
Demonstrați că $\det(AB - BA) = 0$. **Florin Stănescu**

*A 62-a Ediție a Olimpiadei Naționale de Matematică*

*Etapa locală Dâmbovița - 12 Februarie 2011*

# CLASA A XI-A – BAREM DE EVALUARE

## Subiectul 1

**(3 puncte)** Cu inegalitatea mediilor: $0 < 2\sqrt{a_n b_n} \leq \frac{a_n^3}{b_n^2} + \frac{b_n^3}{a_n^2}$

**(2 puncte)** $0 \leq a_n + b_n \leq \frac{a_n^3}{b_n^2} + \frac{b_n^3}{a_n^2}$

**(2 puncte)** Şirul $a_n + b_n$ converge la zero, apoi $0 < a_n, b_n < a_n + b_n \to 0$

## Subiectul 2

**(3 puncte)** Dacă $y_n$ este convergent, ar trebui ca $y_{n+1} - y_n \to 0$, absurd

**(2 puncte)** $z_{2n} \to 0$ cu Cesaro-Stolz

**(2 puncte)** $z_{2n-1} \to 0$ cu Cesaro-Stolz

## Subiectul 3

**(2 puncte)** $(L-\epsilon)x < f(x) < (L+\epsilon)x$, unde $L$ este limita din dreapta

**(2 puncte)** $(L-\epsilon)\frac{1}{k\ln n} < f\left(\frac{1}{k\ln n}\right) < (L+\epsilon)\frac{1}{k\ln n}$

**(1 punct)** $(L-\epsilon)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\ln n} < \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{k\ln n}\right) < (L+\epsilon)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\ln n}$

**(2 puncte)** Şirul $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\ln n}$ tinde la 1 (Cesaro-Stolz) si finalizare

## Subiectul 4

**(3 puncte)** a), unde o soluție calculatorie directă este posibilă

**(2 puncte)** Cu $X = (A+B)^2, Y = AB - BA$, demonstrează $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}\, X \cdot \mathrm{tr}\, Y = 0$

**(2 puncte)** Conform a), rezultă $\det(X+Y) = \det X + \det Y$ și apoi concluzia

***A 62-a Ediție a Olimpiadei Naționale de Matematică***
***Etapa locală Dâmbovița - 12 Februarie 2011***

## CLASA A XII-A

**Subiectul 1.** Într-un grup $(G,\cdot)$ cu elementul neutru notat cu $e$ există două elemente $a, b \in G$ astfel încât $a^3 = e$ și $ab = b^2a$. Demonstrați că $b^7 = e$.

**Florin Stănescu**

**Subiectul 2.** Fie $A$ un inel și $a, b \in A$ astfel încât $1 - ab$ este inversabil.
Demonstrați că $1 + ab(1 - ab)^{-1}$ este inversabil.

**Cristinel Mortici**

**Subiectul 3.** Fie funcția $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ cu $f(0) = 0$ și definită pentru $x \in (0,1]$ prin

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \cos\frac{1}{x} - 3\sqrt{x} \sin\frac{1}{x}.$$

Demonstrați că: a) Funcția $f$ admite primitive.
b) Funcția $f$ nu are limită în zero și există un șir $(u_n)_{n\geq 1} \subset (0,1)$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{n\to\infty} f(u_n) = 2011.$$

**Cristinel Mortici**

**Subiectul 4.** Fie $f\colon [0,1] \to [0,\infty)$ continuă cu $f(1) \neq 0$ și definim șirul $(x_n)_{n\geq 1} \subset (0,1)$ prin

$$\int_0^{x_n} f(t)\,dt = n \int_{x_n}^1 f(t)\,dt\,, \quad n = 1,2,3,\ldots\ .$$

Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton, convergent către 1 și

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - x_n) = \frac{1}{f(1)} \int_0^1 f(t)\,dt.$$

**Florin Stănescu**

*A 62-a Ediție a Olimpiadei Naționale de Matematică*
*Etapa locală Dâmbovița - 12 Februarie 2011*

---

## CLASA A XII-A – BAREM DE EVALUARE

## Subiectul 1

**(2 puncte)** $a = b^2ab^{-1}$ și $a^2 = b^2abab^{-1}$
**(3 puncte)** $(ab)^3 = e$
**(2 puncte)** $b^7 = e$

## Subiectul 2

**(2 puncte)** Dacă $1 - xy$ este inversabil, atunci $1 - yx$ este inversabil
**(2 puncte)** $(1 - yx)(1 + ycx) = (1 + ycx)(1 - yx) = 1$, unde $c = (1 - xy)^{-1}$
**(2 puncte)** Cu $x = a, y = b, c = (1 - ab)^{-1}$, rezultă $1 + b(1 - ab)^{-1}a$ inversabil
**(1 punct)** Aplică procedeul încă o dată și obține $1 + ab(1 - ab)^{-1}$ inversabil

## Subiectul 3

**(4 puncte)** Demonstrează că $F(x) = -2x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$, cu $F(0) = 0$ este o primitivă
**(1 punct)** $f\left(\frac{1}{2n\pi}\right) \to \infty$
**(1 punct)** $f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right) \to 0$
**(1 punct)** Concluzia rezultă folosind continuitatea funcției $f$

## Subiectul 4

**(2 puncte)** Şirul $x_n$ este monoton
**(1 punct)** Şirul $x_n$ converge la 1
**(2 puncte)** Scrie $n(1 - x_n) = \frac{\int_0^{x_n} f(t)dt}{\frac{\int_{x_n}^1 f(t)dt}{1-x_n}}$
**(1 punct)** $\int_0^{x_n} f(t)\,dt \to \int_0^1 f(t)\,dt$
**(1 punct)** $\frac{1}{1-x_n}\int_{x_n}^1 f(t)\,dt \to f(1)$