O PROBLEMĂ – 7 SOLUȚII

prof. Valer Pop

Şc. Gen. Şanț, Bistrița-Năsăud

La concursul Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.ro în etapa a 5-a la clasa a VI-a s-a dat problema 1 cu următorul enunț:

Arătați că numărul $N=1\underbrace{000...0}_{de\,2011\,ori}5$ *este divizibil cu 7.*

***

La problemă au trimis soluții un număr de 77 de elevi. Vă prezentăm câteva soluții ale problemei:

Soluția I

Numărul N se mai scrie: $N=10^{2012}+5$.

Notăm cu M_n un multiplu al numărului natural n şi folosim relația $(a+b)^n = M_n + b^n$.

Putem scrie $N= (7+3)^{2012} +5= M_7 +3^{2012}+5= M_7 +9^{1006}+5= M_7+(7+2)^{1006}+5= M_7+ M_7+2^{1006}+5$.

Deoarece $1006=3\cdot 335+1$ avem: $2^{1006}=2\cdot(2^3)^{335}$, deci

$N= M_7 +2\cdot(7+1)^{335} = M_7+2\cdot(M_7+1^{335})+5= M_7+2+5= M_7+7= M_7$.

Prin urmare numărul N este divizibil cu 7.

Soluția a II-a

Folosesc urmatorul criteriu de divizibilitate cu 7:

Un numar N este divizibil cu 7 daca si numai daca impartind numarul N de la dreapta spre stanga in grupe de cate 3 cifre (ultima grupa poate avea mai putin de 3 cifre) obtinem diferenta dintre sumele grupelor luate din doi in doi un numar divizibil cu 7.

In cazul nostru observam ca 1000...05 (unde 0 apare de 2011 ori) are 2013 cifre. Cum 2013 este divizibil cu 3, numarul 100...05 poate fi impartit in 671 grupe de cate 3 cifre. Prima si ultima grupa din aceasta impartire (singurele grupe ce contin cifre nenule) ocupa cate o pozitie impara. Deci suma grupelor de pe pozitii pare este 0, iar suma grupelor de pe pozitii impare este 100+5= 105.

Diferenta celor doua sume este $105=7\cdot 15$, adica un numar divizibil cu 7. Deci numarul 1000...05 (unde 0 apare de 2011 ori) este divizibi cu 7.

Soluția a III-a

N=1000…0005 (2011 zerouri)
105:7=15, rest0
1005:7=143, rest 4
10005:7=1429, rest 2
100005:7=14286, rest 3
1000005:7=142857, rest 6
10000005:7=1428572, rest 3
100000005:7=14285715, rest 0
Deci observăm că împărțirea este exactă când avem 1, 7, 13, ..., 6k+1 zerouri între 1 şi 5.
Cum numărul 2011= 6·335 +1 => 7|N

Soluția a IV-a

$$1\underbrace{000...00}_{2011\text{ ori}}5=\underbrace{777...777}_{2012\text{ ori}}+\underbrace{222...22}_{2011\text{ ori}}8=\underbrace{777...777}_{2012\text{ ori}}+\underbrace{222...21}_{2012\text{ cifre}}+7=$$

$$=\underbrace{777...777}_{2012\text{ ori}}+\underbrace{2121...21}_{2012\text{ cifre}}+\underbrace{1010...100}_{2011\text{ cifre}}+7$$

numerele $\underbrace{777...777}_{2012\text{ ori}}$, $\underbrace{2121...21}_{2012\text{ cifre}}$,7 sunt divizibile cu 7

Dar $\underbrace{1010...100}_{2011\text{ cifre}}=10\cdot\underbrace{1010...10}_{2010\text{ cifre}}$

Numărul 101010=$7\cdot 14430$
Cele 2010 cifre se impart exact în grupe de câte 6 deci

$$\underbrace{1010...100}_{2011\text{ cifre}}=10\cdot\underbrace{1010...10}_{2010\text{ cifre}}=10\cdot\left(101010\cdot 10^{2004}+101010\cdot 10^{1998}+...+101010\cdot 10^{6}+101010\right)=$$

$$10\cdot 101010\left(10^{2004}+10^{1998}+...+10^{6}+1\right)=10\cdot 7\cdot 14430\left(10^{2004}+10^{1998}+...+10^{6}+1\right)$$

Deci este divizibil cu 7

Soluția a V-a

Folosim criteriul de divizibilitate cu 3 care are următorul enunț:
Numărul N= $a_1a_2a_3...a_n \vdots 7$ dacă şi numai dacă numărul
$(a_1\cdot 3^{n-1}+a_2\cdot 3^{n-2}\cdot a_3\cdot 3^{n-3}\cdot...\cdot a_{n-1}\cdot 3^1+a_n\cdot 3^0)\vdots 7$.

Numărul $N=1\underbrace{000...0}_{de\,2011\,ori}5=10^{2012}+5$ îl transformăm în numărul $3^{2012}+5=3^2\cdot 3^{2010}+5=9\cdot 27^{670}+5=9\cdot(28-1)^{670}+5=9\cdot(M_7-1)^{670}+5=M_7+9+5=M_7+14=M_7$. Deci $7|N$.

Soluția a VI-a

Folosind urmatorul criteriu de divizibilitate:
Scriem numarul "n" in baza 10. Inlocuim baza 10 cu baza 3 iar daca numarul obtinut acum este divizibil cu 7 atunci si numarul initial este divizibil cu 7.

$N = 10^{2012} + 5$

Conform criteriului $N = 3^{2012} + 5$

$N = (3^2)^{1006} + 5$

$N = 9^{1006} + 5$

$N = (7 + 2)^{1006} + 5$

$N = M_7 + 2^{1006} + 5$

$N = M_7 + (2^3)^{335} \bullet 2 + 5$

$N = M_7 + 8^{335} \bullet 2 + 5$

$N = M_7 + (7 + 1)^{335} \bullet 2 + 5$

$N = M_7 + M_7 + 1^{335} \bullet 2 + 5$

$N = M_7 + 2 + 5$

$N = M_7 + 7$

$N = M_7 \,\vdots\, 7$

Soluția a VII-a

$N= 10^{2012}+5 = 10^{2010+2}+5=1000^{670}\cdot 100+5=(M_7-1)^{670}\cdot 100+5=(M_7+1)\cdot 100+5=M_7+100+5=M_7+105=M_7+7\cdot 15=M_7$ rezultă $7|N$.