ŞCOALA CU CLASELE I-VIII, NR. 56 - JOSSE MARTI - BUCUREŞTI

C oncursul Interjudețean de Matematică al Şcolii cu clasele I-VIII nr. 56 "Josse Marti"

Ediția a X-a, 22.01.2011

Clasa a V-a

I. Numerele naturale *a*, *b* şi *c* verifică egalitățile $a-b=25$ şi $3a+b+7c=100$. Calculați $4b+7c$ şi $2a+2b+7c$.

II. Numerele naturale *d*, $d+1$ şi $d+2$ se împart pe rând la numărul natural de două cifre, *a*. Suma celor trei resturi obținute este egală cu 101.

a) Arătați că $a \geq 36$;

b) Determinați restul împărțirii numărului *d* la 52.

III. Suma a două numere naturale este egală cu 157. Se măreşte unul dintre numere cu 62, iar celălalt se măreşte cu 37. Astfel, unul dintre numerele obținute este de trei ori mai mare decât celălalt. Aflați numerele inițiale.

IV. Fie mulțimea $A=\{1,2,...,2010\}$. Se consideră o submulțime *X* cu 1006 elemente a mulțimii A. Arătați că:

a) mulțimea *X* conține cel puțin două numere a căror sumă este egală cu 2011;

b) mulțimea *X* conține cel puțin două numere a căror diferență este egală cu 1005.

SUCCES!

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
- Timp de lucru efectiv : 2 ore.

INSPECTORATUL SCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCURESTI
ŞCOALA CU CLASELE I-VIII, NR. 56 - JOSSE MARTI - BUCUREŞTI
C oncursul Interjudețean de Matematică al Şcolii cu clasele I-VIII nr. 56 "Josse Marti"
Ediția a X-a, 22.01.2011
Clasa a V-a

Soluții şi bareme

I. Prima relație ne dă $a = b + 25$. **1p**
Înlocuind în a doua relație , obținem $3\cdot(b+25)+b+7c=100$,.............. **1p**
adică $4b+7c=100-75=25$ (*)..**2p**
Adunând membru cu membru relațiile din enunț obținem $4a+7c=125$ **1p**
Adunând ulțima relație cu (*), obținem $4a+4b+14c=150$ **1p**
În final $2a+2b+7c=75$ **1p**

II. Resturile obținute la cele trei împărțiri, $0 \le r_1, r_2, r_3 < a$, sunt distincte **1p**
a) Dacă $a < 36$, atunci, de exemplu, $r_1, r_2, r_3 \le 34$, deci $r_1 + r_2 + r_3 \le 99$ **1p**
b) Avem următoarele posibilități
* $r_2 = r_1 + 1, r_3 = r_1 + 2 \le a - 1$, deci $r_1 + r_2 + r_3 = 3r_1 + 3 = 101$, imposibil **1p**
* $r_2 = a - 2, r_3 = a - 1, r_1 = 0$, deci $r_1 + r_2 + r_3 = 2a - 3 = 101$, adică $a = 52$ **2p**
Rezultă $d + 2 = 52k, k \in \mathbb{N}$, restul căutat este 0...**1p**
* $r_3 = a - 1, r_1 = 0, r_2 = 1$, deci $r_1 + r_2 + r_3 = a = 101$, imposibil.................**1p**

III. După mărire, suma numerelor obținute va fi $157+(62+37)=256$ **1p**
Dintre numerele mărite, cel mic va fi egal cu $256:4=64$.................................**2p**
Acesta provine din mărire unuia dintre numerele inițiale cu 62 sau cu 37
În primul caz numerele inițiale sunt egale cu $64-62=2$, respectiv cu 155.......**2p**
În al doilea caz numerele inițiale sunt egale cu $64-37=27$, respectiv cu 130..**2p**

IV. **a)** Elementele mulțimii *A* pot fi grupate în 1005 perechi de forma
$(1,2010),(2,2009),...,(1005,1006)$..**2p**
Suma componentelor fiecărei perechi este egală cu 2011...................................**1p**
Deoarece submulțimea *X* conține 1006 elemente, ea va conține cel puțin una dintre perchile enumerate, suma componentelor acesteia fiind 2011. ....**1p**
b) Elementele mulțimii *A* pot fi grupate în 1005 perechi de forma
$(1005,2010),(1004,2009),...,(1,1006)$ **1p**
Diferența componentelor fiecărei perechi este egală cu 1005..............................**1p**
Deoarece submulțimea *X* conține 1006 elemente, ea va conține cel puțin una dintre perchile enumerate, diferența componentelor acesteia fiind 2011............. **1p**