INSPECTORATUL SCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCURESTI
ŞCOALA CU CLASELE I-VIII, NR. 56 - JOSSE MARTI - BUCUREŞTI
C oncursul Interjudețean de Matematică al Şcolii cu clasele I-VIII nr. 56 "Josse Marti"
Ediția a X-a, 22.01.2011
Clasa a VI-a

I. Împărțind numărul natural n la 7 se obține câtul a şi restul 6, iar împărțind numărul n la 8 se obține restul 1.

a) Demonstrați că a este număr impar;

b) Determinați restul impărțirii lui n la 28.

II. Suma a 11 numere naturale distincte este egală cu 70. Demonstrați că produsul celor 11 numere se divide cu 420.

III. Se consideră semidreptele diferite $OA_1, OA_2, ..., OA_n$, $n \in \mathbb{N}$, astfel încât unghiurile $\widehat{A_1OA_2}, \widehat{A_2OA_3}, \widehat{A_3OA_4}, ..., \widehat{A_{n-1}OA_n}$ au ca măsuri numere naturale mai mici decât 180° şi au interioare disjuncte două câte două.

a) Arătați că $n \geq 3$;

b) Ştiind că $1^\circ = m\left(\widehat{A_1OA_2}\right) = \dfrac{m\left(\widehat{A_2OA_3}\right)}{2} = \dfrac{m\left(\widehat{A_3OA_4}\right)}{2^2} = ... = \dfrac{m\left(\widehat{A_{n-1}OA_n}\right)}{2^{n-2}}$,

determinați valoarea maximă a lui n şi, în acest caz, calculați măsura unghiului $\widehat{A_nOA_1}$.

IV. Se consideră punctele $A_1, A_2, A_3, ...$ astfel încât $A_1A_2 = 1\,\text{cm}$, $A_2A_3 = 2\,\text{cm}$,..., $A_{n-1}A_n = A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-2}A_{n-1}$, oricare ar fi $n \geq 4$.

a) Aflați lungimile segmentelor $[A_3A_4]$ şi $[A_4A_5]$;

b) Determinați n astfel încât $A_{n-1}A_n = 768$.

SUCCES!

Notă:
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
- Timp de lucru efectiv : 2 ore.

Soluții şi bareme

I. Din teorema împărțirii cu rest avem $n = 7a + 6$ şi $n = 8q + 1$, unde q este un număr natural. **1p**

a) Din a doua relație deducem că n este impar,.................................. **1p**
apoi din prima relație rezultă că $7a$ este impar, deci a este impar.... **1p**

b) Înmulțim prima relație cu 8 şi a doua cu 7...................................... **1p**
Prin scăderea membru cu membru a relațiilor obținute rezultă
$n = 56 \cdot (a - q) + 41$ **2p**
Cum 56 se divide cu 28, restul împărțirii lui n la 28 este egal cu restul împărțirii lui 41 la 28, adică 13.. **1p**

II. Arătăm că, printre cele 11 numere, există cel puțin câte un număr care se divide cu 4, 3, 5 şi respectiv 7. ....**1p**
Presupunem că niciunul dintre numere nu se divide cu 4. Suma celor mai mici 11 numere naturale diferite care nu se divid cu 4 este egală cu $81 > 70$. **1p**
Deci cel puțin unul dintre numere se divide cu 4................................... **1p**
Suma celor mai mici 11 numere naturale diferite care nu se divid cu 3 este egală cu $91 > 70$. Deci cel puțin unul dintre numere se divide cu 3................ **1p**
Suma celor mai mici 11 numere naturale diferite care nu se divid cu 5 este egală cu $76 > 70$. Deci cel puțin unul dintre numere se divide cu 5................ **1p**
Suma celor mai mici 11 numere naturale diferite care nu se divid cu 7 este egală cu $71 > 70$. Deci cel puțin unul dintre numere se divide cu 7................ **1p**
În consecință produsul celor 11 numere se divide cu $4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 = 420$

III. **a)** Dacă $n \le 2$, cel puțin unul dintre unghiuri are măsură mai mare decât 180°
Rezultă concluzia **2p**

b) Trebuie ca $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-2} \le 360$ **1p**
Adică $2^{n-1} - 1 \le 360$. Deci $n_{\max} = 9$ **2p**
În acest caz $m\left(\widehat{A_8OA_9}\right) = 128^\circ < 180^\circ$,………………………………...**1p**
iar $m\left(\widehat{A_9OA_1}\right) = 360^\circ - 255^\circ = 105^\circ$ **1p**

IV. **a)** Avem $A_3A_4 = A_1A_2 + A_2A_3 = 1 + 2 = 3$ cm şi **1p**
$A_4A_5 = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 = 2 \cdot A_3A_4 = 6$ cm...**2p**

b) Avem , în general, $A_{n-1}A_n = 2^{n-3} \cdot A_3A_4 = 2^{n-3} \cdot 3$ cm........................**2p**
Deoarece $768 = 3 \cdot 2^8$, rezultă că $n = 11$ **2p**