INSPECTORATUL SCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCURESTI
ŞCOALA CU CLASELE I-VIII, NR. 56 - JOSSE MARTI - BUCUREŞTI

C oncursul Interjudețean de Matematică al Şcolii cu clasele I-VIII nr. 56 "Josse Marti"

Ediția a X-a, 22.01.2011

Clasa a VIII-a

I. Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 8$ cm, $BC = 4\sqrt{3}$ cm şi $m(\sphericalangle ABC) = 30^\circ$.
Punctul E este situat pe perpendiculara în B pe planul (ABC).
Demonstrați că dreptele AC şi CE sunt perpendiculare.

II. Se consideră numerele $a = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$ şi $b = \dfrac{x^4 - x^2 - 1}{x^2}$, unde $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.
Se ştie că numerele a şi b sunt raționale. Arătați că x este număr rațional.

III. **a)** Arătați că, dacă x şi y sunt numere reale pozitive, atunci $\dfrac{4}{x+y} \le \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

b) Numerele reale nenegative a şi b verifică egalitatea $\dfrac{1}{a^2 + 2b + 1} + \dfrac{1}{b^2 + 2a + 1} = 1$.
Demonstrați că $a + b \in \left(\sqrt{3} - 1; 1\right]$.

IV. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC înscris în cercul $C(O; R)$.
Punctele D, E şi F sunt situate pe segmentele (BC), (AB) şi respectiv (AC) astfel încât $AD \perp BC$, $DE \perp AB$ şi $DF \perp AC$. Dacă $AD = R\sqrt{2}$, demonstrați că punctele E, O şi F sunt coliniare.

SUCCES!

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
- Timp de lucru efectiv : 3 ore.

INSPECTORATUL SCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCURESTI
ŞCOALA CU CLASELE I-VIII, NR. 56 - JOSSE MARTI - BUCUREŞTI

C oncursul Interjudețean de Matematică al Şcolii cu clasele I-VIII nr. 56 "Josse Marti"

Ediția a X-a, 22.01.2011

Clasa a VIII-a

Soluții şi bareme

I. Se demonstrează că triunghiul *ABC* este dreptunghic în *C*.......**4p**

Din teorema celor trei perpendiculare, rezultă că $EC \perp AC$ ...**3p**

II. Numărul $\frac{1}{a}=\frac{x^2+x+1}{x}=x+1+\frac{1}{x}$ este rațional, deci $x+\frac{1}{x}=\frac{1}{a}-1\in\mathbb{Q}$.**1p**

Înseamnă că $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(\frac{1}{a}-1\right)^2\in\mathbb{Q}$, deci $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(\frac{1}{a}-1\right)^2-2\in\mathbb{Q}$.**1p**

Avem $b=x^2-1-\frac{1}{x^2}$, deci $x^2-\frac{1}{x^2}=b+1\in\mathbb{Q}$ **1p**

Rezultă că $x^2=c\in\mathbb{Q}$ **1p**

Obținem că $a=\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{x}{x+c+1}$, de unde $x(1-a)=a(c+1)\in\mathbb{Q}$ **2p**

Dacă $x\notin\mathbb{Q}$, rezultă că $a=1$, contradicție..**1p**

III. **a)** Inegalitatea este echivalentă cu $(x-y)^2\geq 0$ **1p**

b) Deoarece $a^2+1\geq 2a$ şi $b^2+1\geq 2b$, rezultă că **1p**

$1=\frac{1}{a^2+2b+1}+\frac{1}{b^2+2a+1}\leq\frac{1}{2a+2b}+\frac{1}{2a+2b}=\frac{1}{a+b}$, deci $a+b\leq 1$...**1p**

Folosind inegalitatea de la punctul **a)** obținem

$1=\frac{1}{a^2+2b+1}+\frac{1}{b^2+2a+1}\geq\frac{4}{a^2+b^2+2a+2b+2}$ **1p**

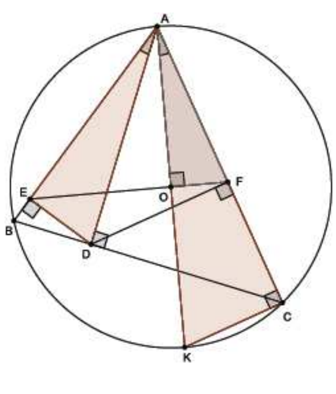
Deci $a^2+b^2+2(a+b)+2\geq 4$, echivalent cu $(a+b)^2+2(a+b)+1\geq 3+2ab$ **1p**

Dacă *a* şi *b* nu sunt nule, rezultă că $(a+b+1)^2>3$, adică $a+b+1>\sqrt{3}$, deci $a+b>\sqrt{3}-1$...**1p**

Dacă , de exemplu, $a=0$, egalitatea din enunț ne dă $b^3=\frac{1}{2}>\left(\sqrt{3}-1\right)^3$,

deci $a+b>\sqrt{3}-1$**1p**

IV. Patrulaterul *AEDF* este inscriptibil, deci $\widehat{DFE}\equiv\widehat{DAE}$ **1p**



Deoarece dreptele *AD* şi *AO* sunt izogonale, rezultă că $AO\perp FE$ **2p**

Fie $\{O'\}=AO\cap EF$, rezultă că triunghiurile AFO' şi *ADB* sunt asemenea, deci $\frac{AF}{AB}=\frac{AO'}{AD}$ **1p**

Fie *K* punctul diametral opus lui *A* . Triunghiurile *ACK* şi *AED* sunt asemenea, deci $\frac{AK}{AD}=\frac{AC}{AE}=\sqrt{2}$ **1p**

Din asemănarea triunghiurilor *AEF* şi *ACB* rezultă că

$\sqrt{2}=\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AF}=\frac{AD}{AO'}=\frac{R\sqrt{2}}{AO'}$. Obținem că $O'=O$.**2p**