O PROBLEMĂ – 4 SOLUȚII

prof. Valer Pop
Şc.Gen.”Enea Grapini”
Şanț, Bistrița-Năsăud

La concursul Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.ro pentru clasa a V-a la etapa a IV-a, s-a propus problema 1 cu următorul enunț:

Fie a, b, c, numere naturale astfel încât b=ax şi c=bx, $x\in N$. Arătați că dacă a+b+c este număr par , atunci a, b, c sunt numere pare.

***

La această problemă au dat soluții un număr de 86 de elevi. Prezentăm în continuare 4 soluții date de aceştia:

Soluția I

În ipoteza ca $a + b + c$ este număr par, cum $b = ax$ si $c = bx= ax^2$, obținem că $a + b + c = a + ax + ax^2 = a(1 + x + x^2)$ este număr par.

Vom demonstra ca numărul $1 + x + x^2$ este întotdeauna impar:

Într-adevăr, cum numerele x si $x + 1$ sunt consecutive, unul dintre ele este par, iar celalalt impar, deci produsul $x(x + 1)$ este întotdeauna par si atunci $1 + x + x^2 = 1 + x(x + 1)$ este întotdeauna impar.

Deoarece $1 + x + x^2$ este impar, iar $a(1 + x + x^2)$ este par, înseamnă ca a este par. Daca a este par, atunci si $ax = b$ este par iar $ax^2 = c$ este par si el, exact ceea ce doream sa demonstram.

Generalizare: Problema se poate generaliza astfel:

Să se arate că dacă suma unui număr impar de termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, cu toți termenii si rația numere naturale, este un număr par, atunci fiecare dintre acei termeni din sumă este neapărat număr par.

Demonstrație: Fie n impar si $a_1, a_2, ..., a_n$ cei n termeni ai progresiei de ratie x numar natural. Atunci $a_2 = a_1x$, $a_3 = a_1x^2, ... , a_n = a_1x^{n-1}$ si avem

$$S = a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1(1 + x + ... + x^{n-1}).$$

Deoarece n este impar, rescriem:

$$x + ... + x^{n-1} = x(1 + x) + x^3(1 + x) + ... + x^{n-2}(1 + x)$$

Fiecare termen din aceasta ultima suma este multiplu de $x(1 + x)$, care e întotdeauna număr par, deci $1 + x + ... + x^{n-1}$ este totdeauna număr impar. Presupunând acum ca S este par, rezulta ca a_1 trebuie neapărat sa fie par, si deci si $a_2, a_3, ... , a_n$ sunt tot numere pare, fiind multipli de a_1 .

Soluția a II-a

Există 2 situații:

1) Când x este un număr par;
2) Când x este un număr impar.

1) Dacă x este număr par atunci ax este un număr par şi evident că şi b va fi număr par. De aici rezultă că şi bx va fi un număr par şi prin urmare şi c va fi un număr par. În această situație, cum b, c sunt ambele pare, evident că dacă a+b+c este un număr par atunci a nu va putea să fie decât un număr par.

2) Dacă x este număr impar există 2 posibilități ca a sa fie impar sau ca a să fie par.

2.1 Dacă presupunem că a este număr impar atunci ax este număr impar şi evident că şi b va fi număr impar. De aici rezultă că şi bx va fi impar şi prin urmare şi c va fi un număr impar. Prin urmare, dacă a+b+c va fi un număr par, rezultă că a va fi obligatoriu un număr par fapt care este în contradicție cu presupunerea inițială.

2.2 Dacă x este număr impar şi dacă presupunem că a este număr par atunci ax este număr par şi evident că şi b va fi număr par. De aici rezultă că şi bx va fi par şi prin urmare şi c va fi un număr par. Cum a, b, c sunt toate pare şi suma a+b+c va fi pară.

Soluția a III-a

$a+b+c = a+ax+bx = a+ax+ax^2 = a(1+x+x^2)$este număr par

Dacă x este număr par atunci x^2 este tot număr par, deci $(1+x+x^2)$ este număr impar.
Dacă x este număr impar atunci x^2 este tot număr impar, deci $(x+x^2)$ este număr par şi $(1+x+x^2)$ este număr impar.
Rezultă că oricare ar fi $x \in N$ numărul $(1+x+x^2)$ este număr impar.
Atunci $a(1+x+x^2)$este număr par doar dacă a este număr par.
Avem că a este număr par deci obținem că b =ax este număr par şi c=bx este numar par.
Rezultă că a,b,c sunt numere pare.

Soluția a IV-a

$$a + b + c = a + ax + ax \cdot x = a + ax + ax^2 = a \cdot \left(1 + x + x^2\right)$$

Presupunem ca a este impar

$\Rightarrow \left(1+x+x^2\right)$ par $\Rightarrow \left(1+x+x^2\right)=2p, p\in N \Rightarrow$

$x^2+x=2p-1 \Rightarrow x\left(x+1\right)=2p-1$ contradicție cu faptul ca produsul a 2 nr consecutive este totdeauna par.

Deci , a este par $\Rightarrow b=ax=par \Rightarrow c=bx=par$