

O PROBLEMĂ – 6 SOLUȚII

prof. Valer Pop
Șc.Gen."Enea Grapini"
Șanț, Bistrița-Năsăud

La concursul Gazeta Matematică și ViitoriOlimpici.ro la clasa a VI-a, la etapa a 3-a s-a propus problema 1 cu următorul enunț:

Fie a, b, c numere naturale nenule astfel încât $5a-14b+3c=0$. Arătați că $a+2c$ se divide cu 7 și $2b+c$ se divide cu 5.

Ion Cicu

La această problemă au trimis soluții 81 de elevi. Vă prezentăm mai jos mai multe soluții prezentate de aceștia.

Soluția I:

Egalitatea se mai poate scrie: $5a+3b=14c$ de unde $(5a+3c):7$, dar și $(7a+7c):7$ de unde prin scădere rezultă $(2a+4c):7$ sau $2(a+2c):7$ și cum $(2;7)=1$ rezultă **$(a+2c):7$**

Dacă scriem egalitatea sub forma: $5a=14b-3c$ rezultă $(14b-3c):5$ și cum $10c:5$, prin adunare obținem $(14b+7c):5$ sau $7(2b+c):5$ de unde **$(2b+c):5$** pentru că $(7;5)=1$

Soluția a II-a:

Egalitatea se mai poate scrie: $5a+10c-14b-7c=0$ sau $5(a+2c)=7(2b+c)$ și cum $(5;7)=1$ rezultă: $(a+2c):7$ și $(2b+c):5$.

Soluția a III-a:

$$5a-14b+3c=0$$

$$5a+3c=14b$$

$$7|14b \rightarrow 7|5a+3c \rightarrow | \cdot 3$$

$$7|3(5a+3c) \rightarrow 7|15a+9c \rightarrow 7|14a+7c+a+2c$$

$$7|14a+7c \rightarrow 7|a+2c$$

$$5a=14b-3c$$

$$5|5a \rightarrow 5|14b-3c \rightarrow 5|3(14b-3c) \rightarrow 5|42b-9c$$

$$\rightarrow 5|40b-10c+2b+c$$

$$\rightarrow 5|5(8b-2c)+2b+c$$

$$\rightarrow 5|2b+c$$

Soluția a IV-a:

Aratati ca $a+2c$ divizibil cu 7 si $2b+c$ divizibil cu 5

$$5a-14b+3c=0 \quad | +2a+4c$$

$$7a-14b+7c=2a+4c$$

$$7(a-2b+c)=2(a+2c)$$

$$(7,2)=1 \Rightarrow a+2c \mid 7$$

$$5a-14b+3c=0 \quad | +4b+2c$$

$$5a-14b+4b+5c=4b+2c$$

$$5a-10b+5c=4b+2c$$

$$5(a-2b+c)=2(2b+c)$$

$$(5,2)=1 \Rightarrow 2b+c \mid 5$$

Soluția a V-a:

Din $5a-14b+3c=0$ avem $5a=14b-3c$ deci $5a=10b+4b-5c+2c$ deci $5a-10b+5c=4b+2c$

$$\text{Deci } 5(a-2b+c)=2(2b+c)$$

Cum 5 si 2 sunt numere prime intre ele atunci obligatoriu $2b+c$ se divide cu 5.

Din $5a-14b+3c=0$ avem $14b=5a+3c$ deci $14b=7a-2a+7c-4c$ deci $2a+4c=7a+7c-14b$ deci

$$2(a+2c)=7(a+7c-14b)$$

Cum 7 si 2 sunt numere prime intre ele atunci obligatoriu $a+2c$ se divide cu 7.

Soluția a VI-a:

$$5a - 14b + 3c = 0 \Rightarrow 5a = 14b - 3c \Rightarrow a = \frac{14b - 3c}{5}$$

Introducem pe "a" astfel determinat in relatia $a+2c$:

$$a + 2c = \frac{14b - 3c}{5} + 2c = \frac{14b - 3c + 10c}{5} = \frac{7(2b + c)}{5}$$

Pentru a satisface aceasta relatie, trebuie ca $2b+c$ sa fie divizibil cu 5, caz in care $a+2c$ este multiplu de 7, deci divizibil cu 7.