Probleme pentru pregătirea olimpiadelor şcolare - clasele V-VIII

Clasa a V-a

(3 puncte) 1. a) Să se afle elementele mulțimii A ={ a,b,c,d,e } ştiind că sunt numere naturale diferite ,nenule, a<b<c<d şi îndeplinesc simultan condițiile :

i) $e^2 = c^2+d^2$

ii) produsul elementelor din mulțimea A este 120

(4 puncte) b) Ordonați crescător numerele c^{2010} , b^{3015} , d^{1506}

Barem de notare

a) $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e = 120$ => $120 = 1\cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ ……………………….1 pct

şi observa că $5^2 = 3^2+4^2$ ……………………………………………. …..1 pct

=> a= 1 , b= 2 , c=3 , d= 4 , e= 5 => A={ 1,2,3,4,5 } ……………… 1 pct

c) $c^{2010} = 3^{2010} = (3^2)^{1005} = (9)^{1005}$ …………………………………….. 1 pct

$b^{3015} = 2^{3015} = (2^3)^{1005} = (8)^{1005}$ ……………………………………… 1 pct

$d^{1506} = 4^{1506} = (2^2)^{1506} = (2^2)^{2\cdot 3 \cdot 251} = (2^3)^{2\cdot 2\cdot 251} = (8)^{1004}$ ……………..1 pct

$(8)^{1004} < (8)^{1005} < (9)^{1005}$ => $d^{1506} < b^{3015} < c^{2010}$ ……………..1 pct

2. Să se afle numerele naturale x şi y ştiind că : $x^y + y^x = x^{x+y} + y^{x+y}$

Barem de notare :

$x^y + y^x = x^{x+y} + y^{x+y} \Leftrightarrow x^y + y^x = x^x \cdot x^y + y^x \cdot y^y \Rightarrow x^y - x^x \cdot x^y = y^x \cdot y^y - y^x \Rightarrow$

$x^y(1-x^x) = y^x(y^y-1)$ ……………………………………………………4 pct

Discuție :

<u>Cazul I</u> : $x^y = y^x$ $\Rightarrow$ x= 1 şi y=1 sau x=2 ; y=4 sau x=4 ; y=2 Egalitatea dată este verificată doar pentru **x= 1 şi y=1** **………………………………………**1 pct

<u>Cazul II:</u> $x^y = y^y - 1 \Rightarrow$ **x= 0 şi y=1** **……………………………………**1 pct

<u>Cazul III:</u> $y^x = 1 - x^x \Rightarrow$ **x= 1 şi y=0……………………………………..**1 pct

3. Aflați două numere naturale ştiind că unul este mai mare decât celălalt cu 33 iar dacă împărțim triplul sumei lor la dublul diferenței lor obținem câtul 2 şi restul 57 .

Barem de notare

Fie a > b => a – b = 33 => ....1 pct

2(a – b) = 66 = dublul diferenței ....1 pct

3(a+b) = triplul sumei ....1 pct

D= I · C + R => ....1 pct

3(a+b) = 66 · 2+ 57 = 189 =>..1 pct

a+b= 63 si a – b = 33 =>a=45 si b= 33...2 pct

4. Se consideră mulțimea $A=\{ 7^{35}\ ,\ 81^{27}\ ,\ 4^{54} \}$ şi numărul

$x = [\ 5\cdot25^{12}:125^{8} - 16^{4}:\ 2^{2^{4}} + (9^{2})^{7} :\ 3^{3^{3}} + 49^{2}: 7^{4}]^{36}$

(2puncte) a) Arătați că x este element al mulțimii A .

(5puncte) b) Stabiliți dacă z este pătrat şi cub perfect , unde z este cel mai mare element din mulțimea A .

Barem de notare

a) Calculează $X= (5 - 1 +3 +1)^{36} = 8^{36} = (2^{3})^{36} = 2^{108}$……………..1pct

observa $4^{54}= (2^{2})^{54} = 2^{108} \Rightarrow x \in A$ ……………………………1 pct

b)Comparăm elementele mulțimii A

$81^{27} = (3^{4})^{27} = 3^{108}$ $4^{54}= (2^{2})^{54} = 2^{108} \Rightarrow 4^{54} < 3^{108}$……… 1pct

$7^{35} < 8^{36}$ …………………………………………………………1 pct

$8^{36} = (2^{3})^{36} = 2^{108} \Rightarrow 7^{35} < 4^{54} < 81^{27} \Rightarrow z = 81^{27}$ ……………..1pct

a = patrat perfect daca $a = k^{2}$

$81^{27} = (3^{4})^{27} = 3^{108} = (\ 3^{54})^{2}$ = patrat perfect …………….. 1pct

a = cub perfect daca $a = k^{3}$

$81^{27} = (3^{4})^{27} = 3^{108} = (\ 3^{36})^{3}$ = cub perfect…………….. 1pct

Clasa a VI-a

1. Fie mulțimea A = $\{\frac{2010}{101},\frac{2011}{102},\frac{2012}{103},.........\}$.

(**5 puncte**) a) Aflați numărul rațional din mulțimea A , situat pe locul 2011

(**2 puncte**) b) Aflați numerele naturale din mulțimea A ..

Barem de notare

a) Forma elementelor din mulțimea A este :

A = $\{\frac{2010+0}{101+0},\frac{2010+1}{101+1},\frac{2010+2}{101+2},.........,\frac{2010+n}{101+n},....\}$.unde $n \in N$ …..1 pct

Numărul rațional din mulțimea A , situat pe locul 2011 se obține pentru n= 2010

$\frac{2010+2010}{101+2010} = \frac{4020}{2111}$ ……………………………………………………….1 pct

b) Pentru a afla numerele naturale din mulțimea A , vom pune condiția ca $\frac{2010+n}{101+n} \in N$

$\Rightarrow$ n+101 / n+2010 ……………………………………………………..1 pct

$\Rightarrow \begin{cases} n+101/n+2010 \\ n+101/n+101 \end{cases} \Rightarrow$ …………………………………………1 pct

$\Rightarrow$ n+101/ n+2010 –n–101 $\Rightarrow$ (n+101) / 1909 ……………………….1 pct
Mulțimea divizorilor naturali ai lui 1909 este $D_{1909} = \{1, 23, 83, 1909\}$ şi
verifică doar n+101= 1909 $\Rightarrow$ n= 1808 ………………………………….1 pct
Calculând $\frac{2010+1808}{101+1808} = \frac{3818}{1909} = 2 \in N$ …………………………………….1 pct
Mulțimea are un singur element număr natural .

Clasa a VII

1. Un trapez ABCD , $m(\hat{A}) = 90^\circ$ AB// CD şi CD<AD<BC<AB are perimetrul de 18 cm iar lungimile laturilor sale sunt exprimate prin 4 numere naturale consecutive .

(5p) **a)** Să se afle aria trapezului ABCD.

(2p) **b)** Calculați distanța de la punctul A la latura BC.

Barem de notare

a) CD<AD<BC<AB $\Rightarrow \begin{cases} CD = x \\ AD = x+1 \\ BC = x+2 \\ AB = x+3 \end{cases} \Rightarrow$ x+ x+1 +x+2 +x+3 = 18 $\Rightarrow$ x=3 $\Rightarrow$ A = 18 cm^2

b) Fie CF$\perp$AB şi AE$\perp$BC $\Rightarrow$ A$\triangle$ABC = $\frac{BC \cdot AE}{2} = \frac{AB \cdot CF}{2} \Rightarrow$ CF= 4,8 cm

Clasa a VII -VIII

1. Fie numărul natural n$\in N$ şi a = $\sqrt{\dfrac{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+....+\frac{1}{2010\cdot 2011}}{\frac{n}{1+2+3+....+2010}}}$

(**5 puncte**) a) Aflați cea mai mare valoare a numărului a$\in$**N**
(**2 puncte**) b) Aflați valoarea numărului n pentru a =1.

Barem de notare

a) Calculează suma S = $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+....+\frac{1}{2010\cdot 2011} = \frac{2010}{2011}$ …………1 pct

Calculează suma S = $\frac{n}{1+2+3+....+2010} = \frac{2n}{2010\cdot 2011}$ …………………..1 pct

Calculează $a=\sqrt{\dfrac{\dfrac{2010}{2011}}{\dfrac{2n}{2010\cdot 2011}}} = \sqrt{\dfrac{2010^2}{2n}}$ ……………………………………1 pct

Descompune $2010^2 = (2\cdot 3\cdot 5\cdot 67)^2$ şi observă că *a este maxim* dacă n=2 …. 1 pct

Calculează a pentru n=2 şi obține a = 505 ……………………………….1 pct

b) $a=\sqrt{\dfrac{2010^2}{2n}}=1 \Rightarrow 2n = 2010^2$ ……………………………………………1 pct

finalizare $n= 2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 67^2 = 2020050$ ……………………………………..1 pct

Prof. Vasile Uleanu - Şcoala nr.5 „Armand Călinescu ”Curtea de Argeş