1. Mulțimea numerelor naturale

1.1. Metode de rezolvare a problemelor de aritmetică

1.1.1. Metoda figurativă

Metoda figurativă este o metodă de rezolvare a problemelor de aritmetică ce constă în reprezentarea printr-un desen a mărimilor necunoscute şi fixarea în acest desen a relațiilor dintre ele şi mărimile date în problemă.

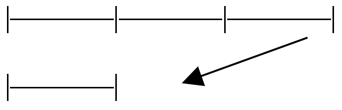
Model. Dinu şi Ionel şi-au pus împreună banii pe care îi aveau, în total 17500 lei. Ce sumă are fiecare din cei doi, ştiind că, dacă Dinu i-ar da lui Ionel 2500 lei, ei ar avea sume egale.

Soluție. Cele două persoane nu au sume egale. Fie acestea:

|———|————————| reprezintă suma lui Dinu

|———| reprezintă suma lui Ionel.

Dinu dă lui Ionel 2500 lei şi cei doi au sume egale:



aceasta înseamnă că Dinu are cu 5000 lei mai mult decât Ionel.

Ce sumă ar avea împreună cei doi, dacă fiecare ar avea o sumă de bani egală cu a lui Ionel?

17500 lei – 5000 lei = 12500 lei

Ce sumă are Ionel?   12500:2 = 6250 lei

Ce sumă are Dinu?   6250 + 5000 = 11250 lei

Verificare: Ce sumă au împreună cele două persoane?

11250 lei + 6250 lei = 17500 lei

Dinu dă lui Ionel 2500 lei. Cei doi au:

11250 lei – 2500 lei = 8750 lei (Dinu)

6250 lei + 2500 lei = 8750 lei (Ionel)

Probleme rezolvate

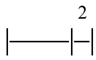
R1.1.1.1. Fiica, tatăl şi bunica au împreună 90 de ani. Peste 2 ani tatăl va avea de 8 ori vârsta fiicei, iar bunica de 2 ori vârsta actuală a tatălui. Să se afle vârsta fiecăruia în prezent.

Soluție. Vom reprezenta vârstele persoanelor în modul următor:

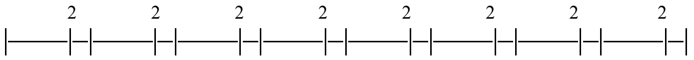
vârsta fiicei în prezent

|——|

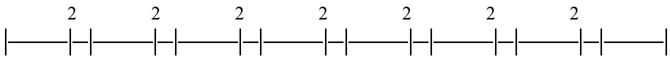
vârsta fiicei peste 2 ani



vârsta tatălui peste 2 ani



vârsta tatălui în prezent



Vârsta tatălui în prezent este formată din 8 segmente şi încă 14 deci vârsta bunicii peste 2 ani va fi dublu, adică va fi formată din 16 segmente şi încă 28, ceea ce înseamnă că în prezent vârsta bunicii este formată din 16 segmente şi încă 26.

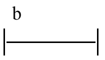
Suma vârstelor în prezent este formată din 25 segmente şi încă 40; un segment reprezintă 2.

Fiica are 2 ani, tatăl are $8\cdot2+14=30$ ani, iar bunica are $16\cdot2+26=58$ani, în prezent.

R1.1.1.2. Dacă într-o clasă se aşează câte 2 elevi într-o bancă, rămân 3 elevi în picioare; dacă se aşează câte 3 elevi într-o bancă rămân 4 bănci libere. Câte bănci şi câţi elevi sunt în clasă?

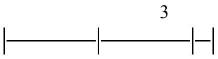
Soluţie. Vom reprezenta cele două mărimi care intervin în problemă prin segmente.

numărul de bănci



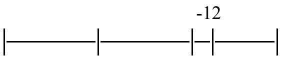
numărul de elevi

$2\cdot b+3$



numărul de elevi

$3\cdot(b-4)=3\cdot b-12$

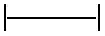


Se constată că $b-12=3$, deci $b-15$.

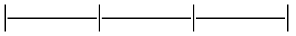
În clasă sunt 15 bănci şi $15\cdot2+3=33$ elevi (sau $3\cdot(15-4)=33$).

R1.1.1.3. Doi elevi aveau de rezolvat un anumit număr de probleme. Când unul din ei mai avea de rezolvat 3 probleme ca să termine, a rezolvat de 3 ori mai multe probleme decât celălalt, care mai avea de rezolvat 15 probleme. Câte probleme avea de rezolvat fiecare elev?

Soluţie. Cei doi elevi nu au rezolvat acelaşi număr de probleme. Fie acestea:

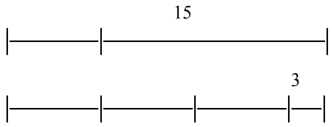


reprezintă numărul de probleme rezolvate de cel de al doilea elev



reprezintă numărul de probleme rezolvate de primul elev

Numărul total de probleme poate fi reprezentat în două moduri:



Numărul de probleme rezolvat de al doilea elev se poate afla

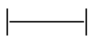
(15-3):2=6 probleme

Numărul total de probleme ce trebuie rezolvate este

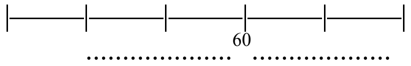
15+6=21 probleme

R1.1.1.4. Cinci băieți aveau, fiecare, acelaşi număr de mere. După ce fiecare a mâncat câte 12 mere, le-au rămas, laolaltă, atâtea mere câte a avut fiecare din ei la început. Câte mere a avut fiecare?

Soluție.


reprezintă numărul de mere ce îl avea fiecare băiat

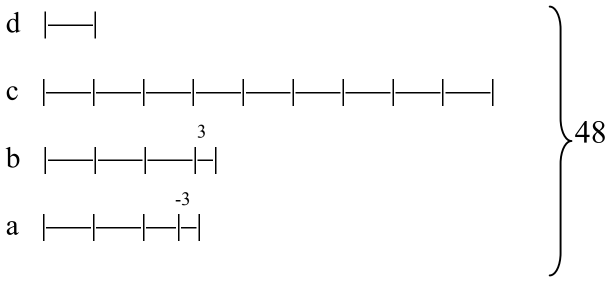
Fiecare băiat mănâncă 12 mere, în total 60 mere se mănâncă.



şi le-au rămas împreună atâtea mere câte au avut 60:4=15 reprezintă numărul de mere pe care l-a avut fiecare la început.

R1.1.1.5. Aflați 4 numere naturale, ştiind că suma lor este 48, iar dacă se adună numărul 3 la primul, se scade 3 din al doilea, se împarte al treilea la 3 şi se înmulțeşte al patrulea cu 3, se obțin numere egale.

Rezolvare. a+3=b-3=c:3=d·3, a,b,c,d fiind cele 4 numere



16d=48

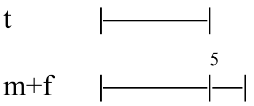
d=3 ⇒ a=6, b=12, c=27, d=3

R1.1.1.6. Tatăl are cu 5 ani mai puțin decât mama şi fiul la un loc. Peste 7 ani, fiul va avea a treia parte din vârsta mamei şi toți trei vor avea împreună 108 ani. Ce vârstă are fiecare în prezent?

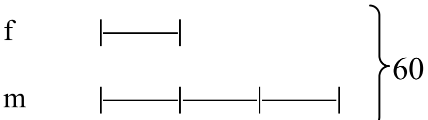
Rezolvare. Se poate afla suma vârstelor celor trei în prezent:

$$108-3\cdot7=87$$

Se poate afla vârsta tatălui în prezent.



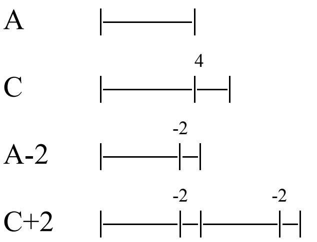
Tata are în prezent (87-5):2=41 ani. Peste 7 ani, tata va avea 48 ani, iar mama şi fiul la un loc vor avea 108-48=60 ani.



60:4=15 ani va avea fiul peste 7 ani, iar mama va avea 45 ani peste 7 ani.
În prezent fiul are 8 ani, iar mama are 38 ani.

R1.1.1.7. Cristina şi Alina sunt colege de bancă. Cristina îi spune Alinei: "Dă-mi două creioane colorate de la tine ca să am de două ori mai multe decât ai tu." Alina zice Cristinei: "Dă-mi tu două creioane colorate de la tine, ca să am şi eu câte au tu." Câte creioane are fiecare fetiță?

Rezolvare.



Diferența dintre C+2 şi A-2 este de 8, deci A-2=8 ⇒ A=10.

Alina are 10 creioane, Cristina are 14 creioane.

1.1.2. Metoda falsei ipoteze

Metoda falsei ipoteze sau a presupunerii este mai puțin cunoscută elevilor. Caracterul neobişnuit al acestei metode, prin gradul sporit de abstractizare, face aplicarea ei aparent dificilă. Rezolvarea problemelor prin metoda ipotezelor pregăteşte pentru înțelegerea multor teme de algebră sau geometrie. Este o inițiere în demonstrarea mai târziu a teoremelor prin metoda reducerii la absurd.

Metoda falsei ipoteze constă în a face o ipoteză (presupunere) oarecare (deşi de obicei se pleacă de la ipoteza "toate de un fel") nu în ideea de a "nimeri" răspunsul, ci pentru a vedea din nepotrivirea cu enunțul ce modificări trebuie să facem asupra ei. Metoda se numeşte "a falsei ipoteze" pentru că avem bănuiala că nu este ipoteză conformă adevărului.

Problemele care se pot rezolva prin metoda falsei ipoteze sunt de două tipuri: a) probleme care se rezolvă printr-o ipoteză; b) probleme care se rezolvă prin două sau mai multe ipoteze.

Remarcă. Problemele examinate ca şi cele propuse pot fi rezolvate şi prin alte metode, atât aritmetic cât şi algebric, în unele cazuri mai eficiente decât metoda presupunerii.

Probleme de primul tip (cu o ipoteză)

R1.1.2.1. O echipă de muncitori a instalat o reţea de apă montând 180 ţevi, unele lungi de 8 m, altele de 6 m. Ştiind că s-au instalat în total 1240 m de ţeavă, aflaţi câte ţevi de fiecare lungime s-au folosit.

Soluţie. Primul mod. Presupunem că toate ţevile erau de 8 m. Atunci, ţevile utilizate ar avea 8·180=1440 m. În realitate au fost 1240 m, cu $1440-1240=200$ m mai puţin. Diferenţa provine din faptul că au fost folosite şi ţevi de 6 m. Înlocuind o ţeavă de 8 m cu una de 6 m se pierd $8-6=2$ m şi pentru a anihila surplusul de 200 m trebuie înlocuite 200:2=100 ţevi de 8 m cu ţevi de 6 m. Prin urmare au fost folosite 100 ţevi de 6 m şi $180-100=80$ ţevi de 8 m.

Verificare: 6·100+8·80=600+640=1240 m.

Al doilea mod. Se presupune că au fost utilizate numai ţevi de 6 m. Se formulează un raţionament asemănător celui anterior, numai că de data aceasta rezultatul este cu 160 m mai mic decât cel din enunţ. De aceea trebuie înlocuite 160:2=80 ţevi de 6 m cu ţevi de 8 m.

Observaţie. Dacă metoda de rezolvare a fost înţeleasă elevii nu trebuie să explice raţionamentul în scris, ci doar să scrie rezolvarea conform planului logic cu observaţiile corespunzătoare.

Primul mod. Presupunem că au fost folosite numai ţevi de 8 m.

1) Care este suma lungimilor ţevilor conform presupunerii?

8·180=1440 m

2) Care este diferenţa dintre lungimea obţinută şi cea reală?

1440 m – 1240 m = 200 m

3) Care este diferenţa dintre o ţeavă de 8 m şi una de 6 m? 2 m

4) Câte ţevi de 6 m au fost instalate? 200:2=100 ţevi

5) Câte ţevi de 8 m au fost utilizate? 180-100=80 ţevi

R1.1.2.2. O excursie costă 310$. Ionel a achitat costul excursiei folosind bancnote de 5$ şi de 20$, în total 23 bancnote. Câte bancnote de fiecare fel a folosit Ionel?

Soluţie. Presupunem că a plătit numai bancnote de 5$.

1) Cât ar fi costat excursia, conform presupunerii? 23·5=115$

2) Care este diferenţa dintre costul obţinut şi cel real?

310$ - 155$ = 195$

3) Care este diferenţa dintre valorile bancnotelor? 20$ - 5$ = 15 $

4) Câte bancnote de 20$ a avut Ionel? 195:15=13 bancnote

5) Câte bancnote de 5$ a avut Ionel? 23-13=10 bancnote

Verificare: 5·10+20·13=50+260=310$

R1.1.2.3. La un concurs se dau 30 de probleme. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 5 puncte, iar pentru fiecare răspuns greşit se scad 3 puncte. Câte răspunsuri corecte a dat un elev care a obținut 118 puncte?

Soluție. Presupunem că elevul a răspuns corect la toate întrebările.

1) Câte puncte ar fi obținut, conform presupunerii? $30 \cdot 5=150$ puncte

2) Care este diferența dintre punctajul obținut şi cel real?

$150-118=32$ puncte

3) Care este plusul de puncte acordat pentru o problemă greşită?

$3+5=8$ puncte

4) Care este numărul de probleme greşite? $32:8=4$ probleme

5) Care este numărul de probleme corecte? $30-4=26$ probleme

Verificare: $26 \cdot 5-4 \cdot 3=130-12=118$ puncte

R1.1.2.4. O persoană se angajează la o lucrare: pentru fiecare zi lucrată primeşte 20$, iar pentru fiecare zi absentată va plăti câte 40$. După 30 zile a constatat că nu a câştigat nimic, dar nici nu este dator. Câte zile a lucrat persoana?

Soluție. Presupunem că persoana a lucrat 30 zile.

1) Ce sumă ar fi câştigat conform presupunerii? $30 \cdot 20=600$$

2) Care este diferența câştigată? $600-0=600$$

3) Care este plusul acordat pentru o zi nelucrată? $20+40=60$$

4) Câte zile nu a lucrat? $600:60=10$ zile

5) Câte zile a lucrat? $30-10=20$ zile

Verificare: $20 \cdot 20-10 \cdot 40=400-400=0$.

R1.1.2.5. Un autoturism pleacă din localitatea A spre localitatea B şi se deplasează cu viteza constantă de 30 km/h. Ajungând în B, se întoarce, fără să oprească, deplasându-se de această dată cu viteza de 20 km/h şi ajunge în A după 5 ore de la plecare (din A). Să se afle distanța dintre cele două localități.

Soluție. Presupunem că distanța de la A la B ar fi 120 km. Drumul de la A la B este parcurs în $120:30=4$ ore. La înapoiere drumul este parcurs în $120:20=6$ ore. Timpul total ar fi 4 ore + 6 ore = 10 ore. În total, timpul este 5 ore, de 2 ori mai mic. Dacă timpul este de 2 ori mai mic, atunci şi distanța reală va fi de 2 ori mai mică, deci $120:2=60$ km.

Verificare: $60:30+60:20=2+3=5$ ore.

Probleme de al doilea tip (cu mai multe ipoteze)

R1.1.2.6. Dacă în fiecare bancă se aşează câte 5 persoane, atunci 10 persoane nu au locuri, iar dacă se aşează câte 6 persoane în fiecare bancă, atunci rămân 5 bănci libere. Câte bănci şi câte persoane sunt?

Soluție.

Ipoteza I: Presupunem că sunt 30 de bănci.

Câte 5 persoane în fiecare bancă................$5 \cdot 30=150$ persoane

Fără loc...10 persoane

Total 160 persoane

Sau: 6 persoane în fiecare bancă.....................$6 \cdot (30-5)=150$ persoane

În cele două situații se constată o diferență de 10 persoane, ceea ce arată că presupunerea făcută nu corespunde situației din problemă.

Ipoteza a II-a: Fie 32 numărul băncilor.

Câte 5 persoane în fiecare bancă..............5·32=160 persoane
Fără loc..10 persoane
Total 170 persoane

Sau: 6 persoane în fiecare bancă....................6(32-5)=162 persoane

Acum diferenţa este de 8 persoane, adică faţă de prima ipoteză, diferenţa s-a micşorat cu 2 persoane, la o creştere a numărului băncilor cu 2. Pentru a ajunge la situaţia din problemă e nevoie de încă 8 bănci, câte una pentru fiecare persoană. Prin urmare numărul băncilor este 30+10=40. Atunci:

Câte 5 persoane în fiecare bancă..............5·40=200 persoane
Fără loc..10 persoane
Total 210 persoane

Deci sunt 40 de bănci şi 210 persoane.

Verificare: 6·(40-5)=6·35=210 persoane.

R1.1.2.7. Într-o magazie se află o cantitate de grâu şi un număr de saci. S-a calculat că dacă în fiecare sac s-ar pune câte 75 kg grâu, atunci ar rămâne 450 kg grâu, iar dacă în fiecare sac s-ar pune câte 80 kg de grâu ar mai rămâne 10 saci. Ce cantitate de grâu şi câţi saci sunt?

Soluţie.

Ipoteza I: Presupunem că sunt 100 de saci.

75 kg în fiecare sac...................................75·100=7500 kg
Rămân...450 kg
Total 7950 kg

Sau: 80 kg în fiecare sac...............................80·(100-10)=7200 kg

Între cele două situaţii se constată o diferenţă de 7950-7200=750 kg, ceea ce nu corespunde situaţiei problemei.

Ipoteza a II-a: Presupunem că sunt 110 saci.

75 kg în fiecare sac..................................75·110=8250 kg
Rămân...450 kg
Total 8700 kg

Sau: 80 kg în fiecare sac...............................800(110-10)=8000kg

Între cele două situaţii se constată o diferenţă de 8700-8000=700 kg, adică faţă de prima ipoteză diferenţa s-a micşorat cu 50 kg. Deoarece la fiecare creştere cu 10 saci reuşim o micşorare a diferenţei cu 50 kg, atunci pentru fiecare creştere a numărului de saci cu 1, diferenţa se micşorează cu 5kg. Pentru a acoperi diferenţa de 750 kg avem nevoie de 750:5=150 saci. Prin urmare numărul sacilor trebuie să fie 100+150=250 saci.

Atunci, cantitatea de grâu este 75·250+450=19200 sau
$80\cdot(250-50)=19200$.

Deci sunt 250 saci şi 19200 kg grâu.

R1.1.2.8. Elevii unei clase au de plantat pomi. Dacă fiecare elev ar planta câte un pom, atunci s-ar planta cu 25 pomi mai puţin decât era planificat, iar dacă fiecare elev ar planta câte 2 pomi, atunci 4 elevi nu ar avea pomi de plantat. Câţi elevi erau în clasă şi câţi pomi aveau de plantat?

Soluție.

Ipoteza I: Presupunem că sunt 20 de elevi.

Fiecare plantează câte un pom..............20·1=20 pomi
Rămân..25 pomi
Total 45 pomi

Sau: Se plantează câte 2 pomi....................(20-4)·2=32 pomi

Între cele două situații se constată o diferență de 45-32=13 pomi, ceea ce nu corespunde problemei.

Ipoteza a II-a: Presupunem că sunt 30 de elevi.

Fiecare plantează câte un pom..............30·1=30 pomi
Rămân...25 pomi
Total 55 pomi

Sau: se plantează câte 2 pomi.....................(30-4)·2=52 pomi

Între cele două situații se constată o diferență de 55-52=3 pomi, adică față de prima ipoteză diferența s-a micşorat cu 10 pomi. Deoarece la fiecare creştere cu 10 elevi reuşim o micşorare a diferenței cu 10 pomi, atunci pentru fiecare creştere a numărului de elevi cu 1, diferența se micşorează cu 1 pom. Pentru a acoperi diferența de 13 pomi avem nevoie de 13 elevi. Prin urmare numărul elevilor este 20+13=33 elevi.

Atunci, numărul pomilor este 33·1+25=58 pomi sau $(33-4)\cdot 2 = 29\cdot 2 = 58$ pomi.

Deci sunt 33 elevi şi aveau de plantat 58 pomi.

1.1.3. **Metoda comparației** (metoda reducerii la acelaşi termen de comparație)

Problemele care se rezolvă folosind această metodă se caracterizează prin faptul că se dau două mărimi (care sunt comparate "în acelaşi mod") şi legătura care există între ele. Aceste mărimi sunt caracterizate prin câte două valori fiecare şi de fiecare dată se cunoaşte legătura dintre ele. Metoda constă în a face ca una din cele două mărimi să aibă aceeaşi valoare şi astfel problema devine mai simplă, având o singură necunoscută. Din această cauză se numeşte "aducerea la acelaşi termen de comparație".

Remarcă. Metoda comparației stă la baza rezolvării sistemelor de două ecuații cu două necunoscute prin metoda reducerii.

Model. Un țăran a primit pentru 2 gâşte şi 3 rațe 1225000 lei. Altă dată vânzând, la acelaşi preț, a primit pentru 3 gâşte şi 5 rațe 1950000 lei. Care este prețul unei gâşte? Care este prețul unei rațe?

Soluție. Pentru 2 gâşte şi 3 rațe a primit 1225000 lei şi pentru 3 gâşte şi 5 rațe a primit 1950000 lei. Presupunem că prima dată ar fi vândut de 3 ori mai multe gâşte şi de 3 ori mai multe rațe, deci ar fi încasat o sumă de 3 ori mai mare; şi presupunem că a doua oară ar fi vândut de 2 ori mai multe gâşte şi de 2 ori mai multe rațe, deci ar fi încasat o sumă de 2 ori mai mare. Avem:

Pentru 6 gâşte şi 9 rațe ar fi încasat 3675000 lei şi

pentru 6 gâşte şi 10 rațe ar fi încasat 3900000 lei,
de unde 1 rață a vândut-o cu 3900000-3675000=225000 lei.

Pentru 3 rațe a primit 3·225000 lei=675000 lei.

Pentru 2 gâşte a primit 1225000-675000=550000 lei, de unde 1 gâscă a vândut-o un 550000:2=275000 lei.

Răspuns: 1 rață a vândut-o cu 225000 lei
1 gâscă a vândut-o cu 275000 lei.

Observații. Problema se putea rezolva şi prin reducerea celei de a doua mărimi:

Presupunem că prima dată ar fi vândut de 5 ori mai multe gâşte şi de 5 ori mai multe rațe, deci ar fi încasat o sumă de 5 ori mai mare; şi presupunem că a doua oară ar fi vândut de 3 ori mai multe gâşte şi de 3 ori mai multe rațe, deci ar fi încasat o sumă de 3 ori mai mare. Avem:

Pentru 10 gâşte şi 15 rațe ar fi încasat 6125000 lei şi şi
pentru 9 gâşte şi 15 rațe ar fi încasat 5850000 lei
de unde 1 gâscă a vândut-o cu 6125000-5850000=275000 lei.

Pentru 2 gâşte a primit 2·275000=550000 lei, iar pentru 3 rațe a primit 1225000-550000=675000 lei, de unde 1 rață a vândut-o cu 675000:3=225000 lei.

Probleme rezolvate

R1.1.3.1. 7 bile mari şi 3 bile mici cântăresc 44 grame, iar 5 bile mari şi 8 bile mici cântăresc 49 grame. Cât cântăreşte o bilă mare? Cât cântăreşte o bilă mică?

Soluție. Presupunem că în prima situație numărul bilelor creşte de 5 ori, deci şi masa lor va creşte tot de 5 ori, în a doua situație numărul bilelor creşte de 7 ori, deci şi masa va creşte tot de 7 ori. Avem:

35 bile mari şi 15 bile mici cântăreau 220 grame şi
35 bile mari şi 56 bile mici cântăresc 343 grame,
de unde 56-15=41 bile mici cântăresc 343-220=123 grame, deci o bilă mică cântăreşte 123:41=3 grame.

Atunci 3 bile mici cântăresc 9 grame, iar 7 bile mari cântăresc $44-9=35$ grame, de unde o bilă mare cântăreşte 35:7=5 grame.

Verificare: 7·5+3·3=35+9=44
5·5+8·3=25+24=49.

R1.1.3.2. Suma dintre dublul unui număr şi triplul unui alt număr este 370. Dacă suma dintre primul număr multiplicat de 5 ori şi al doilea număr multiplicat de 7 ori este 875, să se afle numerele.

Soluție. Notăm cu a şi b cele două numere. Avem în prima situație $2a+3b=370$ şi în a doua situație $5a+7b=875$. Presupunem că în prima situație numerele ar creşte de 5 ori, iar în a doua situație numerele ar creşte de 2 ori, atunci sumele ar creşte de 5 ori, respectiv de 2 ori. Avem $10a+15b=1850$ şi $10a+14b=1750$, deci al doilea număr $b=1850-1750$, adică $b=100$; atunci $3b=300$, iar $2a=70$, deci $a=35$. Numerele sunt 35 şi 100.

R1.1.3.3. Un caiet, 3 creioane şi 5 reviste costă 64000 lei, iar 5 caiete, 4 creioane şi 3 reviste costă 56000 lei.

a) Cât costă, la un loc, un caiet, un creion şi o revistă?

b) Cât costă, la un loc, 1 creion şi 2 reviste?

c) Cât costă fiecare obiect, dacă prețul unei reviste întrece cu 1000 lei prețul unui creion multiplicat de 5 ori?

Soluție. 1 caiet, 3 creioane, 5 reviste costă 64000 lei şi

5 caiete, 4 creioane, 3 reviste costă 56000 lei.

a) Presupunem că în situația a doua se măreşte de 2 ori numărul de caiete, de creioane, de reviste, deci şi suma se măreşte de 2 ori; avem

10 caiete, 8 creioane, 6 reviste vor costa 112000 lei.

Ştim 1 caiet, 3 creioane, 5 reviste costă 64000 lei, deci împreună 11 caiete, 11 creioane, 11 reviste costă 176000 lei, de unde 1 caiet, 1 creion, 1 revistă costă împreună 176000:11=16000 lei.

b) Presupunem că în prima situație se măreşte de 5 ori numărul de caiete, de creioane, de reviste, deci şi suma se măreşte de 5 ori; avem

5 caiete, 15 creioane, 25 reviste costă 320000 lei

Ştim 5 caiete, 4 creioane, 3 reviste costă 56000 lei, deci pentru 11 creioane şi 22 reviste se va plăti 320000-56000=264000 lei, de unde 1 creion şi 2 reviste costă împreună 264000:11=24000 lei.

c) Se rezolvă prin metoda figurativă:

|———| reprezintă prețul unui creion

1000

|———|———|———|———|———|———| reprezintă prețul unei reviste

Se ştie că un creion şi 2 reviste costă împreună 24000 lei, deci un creion costă (24000-2000):11=2000 lei. Costul unui creion este 2000 lei, costul unei reviste este 11000 lei, iar costul unui caiet $16000-(2000+11000)=3000$ lei.

1.1.4. Metoda mersului invers (retrogradă)

Metoda mersului invers (retrogradă) este folosită în probleme în care elementul necunoscut apare în faza de început a şirului de calcule; operațiile se efectuează în sens invers acțiunii problemei. Această metodă constă în faptul că enunțul unei probleme trebuie urmărit de la sfârşit spre început. Analizând operațiile făcute în problemă şi cele pe care le facem noi în rezolvarea problemei, constatăm că de fiecare dată, pentru fiecare etapă, facem operația inversă celei făcute în problemă. Deci, nu numai mersul este invers, ci şi operațiile pe care le facem pentru rezolvare sunt operațiile inverse celor din problemă. Verificarea (proba) se face aplicând asupra rezultatului obținut operațiile indicate în problemă.

Model. 1) Să se determine valoarea lui x din:

$$10+10:\{[10+10\cdot(x-10)]:10-10\}=11.$$

Soluție. Pentru fiecare etapă facem operația inversă celei făcute în problemă:

1) $10:\{[10+10\cdot(x-10)]:10-10\}=11-10$, deci celălalt termen al sumei este 1.

2) Împărțitorul $[10+10\cdot(x-10)]:10-10=10:1$ (deîmpărțit:cât)

3) Descăzutul $[10+10\cdot(x-10)]:10=10+10$ (scăzător+diferență)

4) Deîmpărțitul $10+10\cdot(x-10)=20\cdot 10$ (cât · împărțitor)

5) Un termen al sumei se află prin diferența dintre sumă şi termenul cunoscut $10\cdot(x-10)=200-10$.

6) Un factor al produsului se află împărțind produsul la factorul cunoscut $x-10=190:10$.

7) Descăzutul este suma dintre scăzător şi diferență $x=10+19$, deci $x=29$.

Verificarea se face aplicând rezultatului obținut operațiile ce sunt indicate în exercițiu:

$29-10=19$; $19\cdot 10=190$; $190+10=200$; $200:10=20$; $20-10=10$;
$10:10=1$; $10+1=11$. Rezultatul obținut este corect.

2) Mă gândesc la un număr pe care îl adun cu 27; rezultatul îl împart la 4 şi-l adun apoi cu 6. Suma astfel obținută o împart la 7 şi din rezultat scad 7. Dacă obțin 1, la ce număr m-am gândit?

Această problemă diferă de problema de mai sus pentru că elevul trebuie să-şi scrie singur şirul de operații ce se efectuează.

Soluție. Notez cu x numărul necunoscut. Înlocuind în enunțul problemei se obține: $[(x+27):4+6]:7-7=1$.

Efectuând pentru fiecare etapă operația inversă celei făcute în problemă se obține: $[(x+27):4+6]:7=1+7$, $(x+27):4+6=8\cdot 7$, $(x+27):4=56-6$,
$x+27=50\cdot 4$, $x=200-27$, $x=173$.

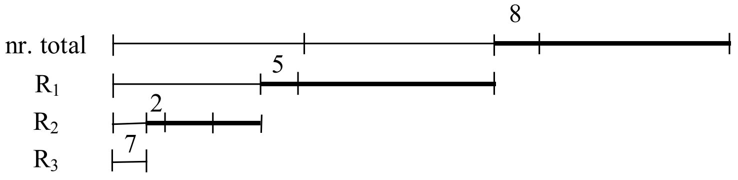
Probleme rezolvate

R1.1.4.1. Pe o banchiză plutesc mai mulți pinguini. Părăsesc banchiza prima dată pinguinii imperiali, o treime din toți pinguinii. Îi urmează alți 8 pinguini. Apoi pleacă jumătate din cei rămaşi, încă 5, două treimi din cei rămaşi şi încă 2 şi rămân pe banchiză 7 pinguini. Câți pinguini imperiali au fost?

Soluție. Din numărul total N de pinguini pleacă a treia parte şi încă 8 şi rămâne restul R_1 de pinguini. Apoi pleacă jumătate din R_1 şi încă 5 pinguini şi rămâne restul R_2. Din acest rest R_2 mai pleacă două treimi şi încă 2 pinguini şi rămâne restul R_3 de pinguini, adică 7 pinguini.

Avem $(7+2)\cdot 3=27$, ceea ce reprezintă valoarea lui R_2; $(27+5)\cdot 2=64$, ceea ce reprezintă valoarea lui R_1; $(64+8):2\cdot 3=108$ reprezintă numărul total de pinguini. $108:3=36$ reprezintă numărul pinguinilor imperiali.

Ne putem ajuta de o figură, prin care să reprezentăm numărul total de pinguini şi resturile:

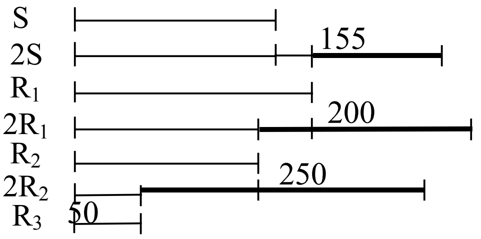


R1.1.4.2. O persoană are o sumă. După ce dublează această sumă cheltuieşte 155\$. Dublează apoi suma rămasă şi mai cheltuieşte 200\$. După ce dublează noul rest şi cheltuieşte încă 250$ constată că i-au mai rămas 50$. Care este suma inițială pe care a avut-o această persoană?

Soluție. Suma totală S se dublează, se cheltuieşte 155$ din ea şi se obține R_1; R_1 se dublează şi din el se cheltuieşte 200$ şi se obține R_2; R_2 se dublează şi din el se cheltuieşte 250$ şi rămâne R_3 ceea ce reprezintă 50$.

Avem 50+250=300, ceea ce reprezintă dublul lui R_2, deci $R_2=150$; 150+200=350 reprezintă dublul lui R_1, deci $R_1=175$; 175+155=330 reprezintă dublul sumei, deci suma inițială a fost 165$.

Ne putem ajuta de o figură, prin care să reprezentăm suma inițială şi sumele rămase de fiecare dată.

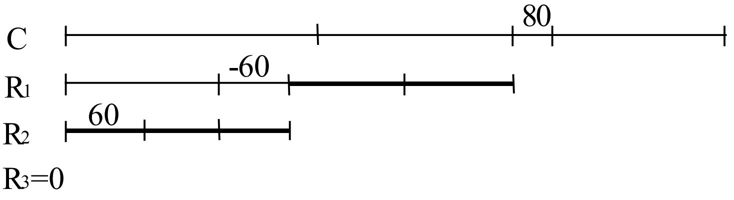


R1.1.4.3. Dintr-un magazin se vinde marfă astfel: prima dată o treime din cantitate şi încă 80 kg, a doua oară două treimi din rest mai puțin 60 kg şi a treia oară două treimi din rest şi încă 60 kg. Să se afle ce cantitate a fost inițial şi cât s-a vândut zilnic, dacă în magazin nu a mai rămas marfă.

Soluție. Din cantitatea totală C se vinde prima dată o treime şi încă 80 kg şi a rămas cantitatea R_1; apoi, din R_1 se vinde două treimi mai puțin 60 kg şi a rămas R_2; apoi, din R_2 se vinde două treimi şi încă 60 kg şi a rămas R_3; $R_3=0$.

Avem $(0+60)\cdot3=180$, ceea ce reprezintă R_2, deci $R_2=180$, $(180-60)\cdot3=360$, ceea ce reprezintă R_1, deci $R_1=360$, $(360+80):2\cdot3=660$ ceea ce reprezintă cantitatea inițială.

Ne putem ajuta de o figură, prin care să reprezentăm cantitatea inițială şi cantitățile rămase de fiecare dată:



R1.1.4.4. Un biciclist parcurge un drum în trei etape: în prima etapă parcurge o pătrime din drum plus 5 km; în a doua etapă parcurge o şeptime din restul drumului şi încă 10 km, iar în etapa a treia parcurge patru cincimi din noul rest şi încă 10 km. Aflați lungimea drumului.

Soluție. Observăm că 10 km reprezintă o cincime din lungimea etapei a treia. Deci, în etapa a treia biciclistul a parcurs $10\cdot5=50$ km. Adunând 50 km cu 10 km, obținem 60 km, ceea ce reprezintă şase şeptimi din distanța care a rămas de parcurs după prima zi. Deoarece o şeptime din această distanță reprezintă 10 km, rezultă că distanța rămasă după prima etapă este 70 km. Deci, după prima etapă au mai rămas de parcurs 70 km.

70 km + 5 km = 75 km, ceea ce reprezintă trei pătrimi din lungimea drumului. Prin urmare lungimea drumului este 75:3·4=100 km.

Raționamentul anterior poate fi expus folosind întrebări:

1) Ce parte din drum reprezintă 10 km? o cincime

2) Ce distanță a parcurs biciclistul în etapa a treia? 10 km · 5 =50 km

3) Ce distanță i-a rămas de parcurs biciclistului după ce a parcurs o şeptime din cât i-a mai rămas după prima etapă? 50 km + 10 km = 60 km

4) Ce parte din distanța rămasă de parcurs după prima etapă reprezintă 60 km? 6 şeptimi

5) Cât reprezintă o şeptime? 60:6=10 km

6) Ce distanță i-a mai rămas de parcurs biciclistului după prima etapă? 10 km + 60 km = 7·10 km = 70 km

7) Ce distanță reprezintă trei pătrimi din lungimea drumului?
70 km + 5 km = 75 km

8) Ce distanță reprezintă o pătrime? 75:3=25 km

9) Care este lungimea drumului? 4·25=100 km

Răspuns: 100 km.

1.1.5. Probleme de mişcare

Problemele de mişcare se clasifică în:

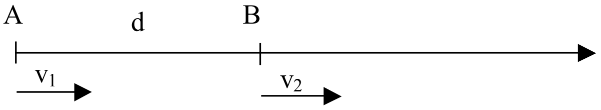
1) probleme de mişcare în acelaşi sens (numite probleme de urmărire)

2) probleme de mişcare în sensuri contrare.

Legea mişcării uniforme, exprimată prin $d = v \cdot t$ (distanța=viteza·timp, viteza=distanța:timp, $v = d : t$, timpul=distanța:viteză, $t = d : v$), este esențială în rezolvarea tuturor problemelor cărora le zicem "de mişcare uniformă".

Model. Două automobile pleacă simultan şi în acelaşi sens din localitățile A şi B aflate la distanța *d*. Automobilul din A are viteza v_1, iar automobilul din B are viteza v_2, $v_1 > v_2$. După cât timp cel din A îl ajunge pe cel din B?

Soluție. Putem ilustra astfel:



$v_1 > v_2$ pentru că numai astfel automobilul din A poate să îl ajungă pe cel din B. Deci, automobilul din A îl urmăreşte pe cel din B, de care îl desparte distanța *d*.

Pentru a afla după cât timp îl ajunge sau după cât timp recuperează distanța *d*, ar trebui să aflăm mai întâi cu cât se apropie într-o unitate de timp sau cât recuperează din distanță într-o unitate de timp. Presupunând că vitezele sunt exprimate în km/h (prin viteză înțelegem distanța parcursă de automobil într-o unitate de timp) şi distanța *d* în kilometri, formulăm întrebarea:

Cu cât se apropie automobilul din A de cel din B într-o oră?

Răspunsul este: cu $(v_1 - v_2)$ km. Dacă într-o oră automobilul din A recuperează $(v_1 - v_2)$ km din distanța *d*, atunci întreaga distanță *d* care le desparte o va recupera într-un număr de ore egal cu numărul care indică de câte ori $v_1 - v_2$ se cuprinde în *d*, adică $d:(v_1 - v_2)$, $t = d:(v_1 - v_2)$.

Rezolvarea unei probleme de mişcare (şi nu numai) parcurge următoarele etape importante:

1) cunoaşterea enunțului problemei
2) înțelegerea enunțului problemei
3) analizarea şi schematizarea problemei
4) rezolvarea propriu-zisă a problemei
5) verificarea soluției obținute.

Probleme rezolvate

R1.1.5.1. Nişte turişti pornesc de la o cabană la ora 8 dimineața şi merg cu viteza de 6 km/h. La ora 12 în aceeaşi zi se trimite după ei un curier cu o telegramă. Curierul se deplasează cu viteza de 14 km/h. După cât timp şi la ce distanță de cabană va ajunge curierul grupul de turişti?

Soluție. Din enunț rezultă că problema dată este de mişcare în acelaşi sens (o problemă de urmărire, curierul urmăreşte un grup de turişti).

Trebuie să stabilim în ce moment începe urmărirea şi la ce distanță de cabană se află grupul de turişti în momentul plecării curierului.

Planul logic şi operațiile corespunzătoare:

1) Cât timp merge grupul de turişti până la plecarea curierului?

12 h – 8 h = 4 h

2) Ce distanță parcurge grupul de turişti până la momentul plecării curierului? 6·4=24 km (am aplicat $d = v \cdot t$)

3) Aflăm cu cât se apropie curierul de turişti în fiecare oră.

14 km – 6 km = 8 km (adică, $v_1 - v_2$)

4) După câte ore se întâlnesc turiştii cu curierul?

24:8=3. După 3 ore.

5) La ce distanță de cabană are loc întâlnirea?

14·3=42 km (sau 6·7=42 km, deoarece turiştii merg timpul de 4 h + 3 h = 7 h şi au viteza 6 km/h)

Răspuns: Curierul ajunge grupul de turişti după 3 ore la 42 km de cabană.

Remarcă. În cazul mobilelor care se deplasează pe aceeaşi direcție şi în acelaşi sens (se urmăresc) viteza de apropiere a unuia față de celălalt este egală cu diferența vitezelor celor două mobile.

R1.1.5.2. Un ogar urmăreşte o vulpe care are 60 de sărituri înaintea lui. Peste câte sărituri va ajunge ogarul vulpea, ştiind că, pe când ogarul face 6 sărituri, vulpea face 9, dar că 3 sărituri de-a ogarului fac cât 7 de-ale vulpii?

Soluția 1. Problema poate fi rezolvată folosind formula $t = d:(v_1 - v_2)$, unde *d* este distanța dintre urmărit şi urmăritor, v_1 este viteza urmăritorului, v_2 este viteza urmăritului, *t* este intervalul de timp în care urmăritorul îl ajunge pe urmărit. Notez l_1 şi l_2 lungimea săriturii ogarului, respectiv lungimea săriturii vulpii. Atunci $v_2 = 9l_2$, iar $v_1 = 6l_1 = 6:3\cdot 7l_2 = 14l_2$, iar diferența de viteză $v_1 - v_2 = 5l_2$. Timpul necesar pentru ca ogarul să ajungă vulpea este $t = d:(v_1 - v_2)$, iar $d = 60l_2$, deci $t = 60l_2 :(5l_2) = 12$ unități de timp. În 12 unități de timp ogarul face 12·6=72 sărituri.

Soluția 2. În timp ce ogarul face 6 sărituri...........vulpea face 9 sărituri
2 sărituri de ogar.............7 sărituri de vulpe.

Transformăm datele pentru a le putea compara:
În timp ce ogarul face 6 sărituri...........vulpea face 9 sărituri
6 sărituri de ogar ....14 sărituri de vulpe.

Comparând rezultatele constatăm că în timp ce ogarul face 6 sărituri, vulpea face 9 sărituri, dar cele 6 sărituri ale ogarului fac cât 14 sărituri ale vulpii. După fiecare 6 sărituri ogarul se apropie de vulpe cu 5 sărituri.

De câte ori trebuie să facă ogarul câte 6 sărituri pentru a acoperi distanța de 60 de sărituri (de vulpe)? Evident de 60:5=12 ori.

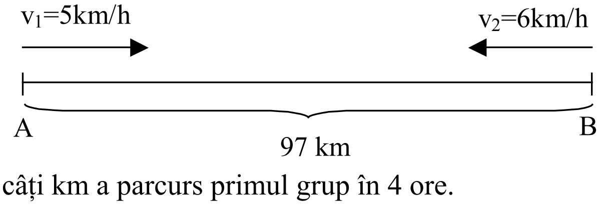
Câte sărituri face ogarul până ajunge vulpea? 12·6=72 sărituri.

R1.1.5.3. Un ogar urmăreşte o vulpe care are 60 de sărituri înaintea lui. Poate ogarul să ajungă vulpea, ştiind că, în timp ce ogarul face 6 sărituri, vulpea face 9, dar că 5 sărituri ale ogarului fac cât 7 ale vulpii?

Soluție. Notez l_1, l_2 lungimea săriturii ogarului, respectiv lungimea săriturii vulpii, v_1, v_2 viteza ogarului, respectiv viteza vulpii şi *d* distanța dintre ogar şi vulpe. Avem $d = 60l_2$, $v_2 = 9l_2$, $v_1 = 6l_1 = 6:5\cdot 7l_2 = 8{,}4l_2$. Deoarece $v_1 < v_2$, vulpea scapă sau ogarul nu poate ajunge vulpea.

R1.1.5.4. Distanța dintre cabana A şi B este de 97 km. Un grup de turişti a pornit de la cabana A spre cabana B cu viteza de 5 km/h. După 4 ore din cabana B porneşte un grup în întâmpinarea primului grup cu viteza 6 km/h. După câte ore se vor întâlni turiştii?

Soluție.



1) Aflăm câți km a parcurs primul grup în 4 ore.
5·4=20 km $(d = v\cdot t)$

2) Aflăm distanța dintre grupele de turişti în momentul în care pleacă al doilea grup de turişti. 97-20=77 km

3) Aflăm cu cât se apropie cele două grupuri de turişti.
6+5=11 km/h

4) Aflăm în cât timp grupul al doilea se întâlneşte cu primul.

77:11=7 ore

Grupurile se întâlnesc după 7 ore.

Remarcă. În cazul mobilelor care se deplasează pe aceeaşi direcţie, dar în sensuri contrare, viteza de apropiere a unuia faţă de celălalt este egală cu suma vitezelor celor două mobile.

R1.1.5.5. Două trenuri vin din direcţii opuse, pe linii paralele: unul merge cu viteza de 75 km/h, altul cu viteza de 78 km/h. Pasagerul din primul tren a observat că al doilea tren a trecut prin faţa sa în 10 secunde, iar călătorul din trenul al doilea a observat că primul tren a trecut prin faţa sa în 6 secunde.

a) Care este lungimea primului tren?

b) Care este lungimea celui de al doilea tren?

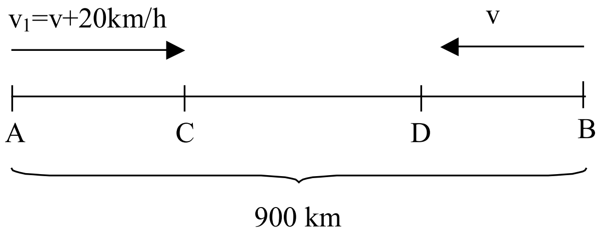
Soluţie. a) În cazul mobilelor care se deplasează pe aceeaşi direcţie, dar în sensuri contrare, viteza de apropiere dintre ele este suma vitezelor lor; deci viteza cu care un tren trece pe lângă celălalt este 75+78=153 km/h.

Primul tren trece pe lângă pasagerul din al doilea tren în 6 secunde. Ţinând cont că $d = v \cdot t$, rezultă că lungimea primului tren este (153000:3600) m/s · 6 s, adică 255 m.

b) Al doilea tren trece pe lângă pasagerul din primul tren în 10 secunde, rezultă că lungimea celui de al doilea tren este
(153000:3600) m/s · 10 s, adică 425 m.

R1.1.5.6. Din oraşele A şi B pornesc unul spre celălalt două trenuri. Unul are viteza cu 20 km/h mai mare decât celălalt. Distanţa dintre oraşe este de 900 km. După 3 ore suma distanţelor parcurse de ambele trenuri este cu 120 km mai mică decât distanţa rămasă. Să se afle vitezele medii ale trenurilor.

Soluţie.



Analizând schema grafică observăm că: AC reprezintă distanţa parcursă de primul tren, BD distanţa parcursă de al doilea tren şi CD este distanţa rămasă. Ştim că CD=AC+BD+120 km. Putem scrie:
AB=AC+CD+DB=AC+AC+BD+120 km+DB,
de unde rezultă că 900 km=2AC+2BD+120 km.

1) Aflăm cât reprezintă 2AC+2BD. 900-120=780 km

2) Aflăm suma distanţelor parcurse de cele două trenuri.

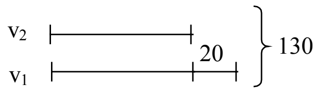
780 km : 2 = 390 km

3) Aflăm cu cât se apropie trenurile într-o oră sau suma vitezelor trenurilor.

$(v_1 + v_2) \cdot 3h = 390$ km, de unde $v_1 + v_2 = 130$ km/h

4) Aflăm vitezele celor două trenuri.

$$v_1 + v_2 = 130\,\text{km/h} \quad \text{şi} \quad v_1 = v_2 + 20\,\text{km/h}.$$



$$v_2 = [(130-20):2]\,\text{km/h}$$

$$v_2 = 55\,\text{km/h şi } v_1 = 75\,\text{km/h}.$$

1.1.6. Probleme de perspicacitate

Problemele prezentate la această temă se rezolvă folosind elemente de logică matematică şi nu se încadrează în nici una din metodele prezentate (figurativă, falsei ipoteze, mersul invers, comparației). Ingeniozitatea, spiritul de inițiativă, perspicacitatea, deducția sunt calități care "puse în mişcare" duc la soluții surprinzătoare.

Rezolvarea acestor probleme e o provocare la un "duel al minții": să alegi soluția prin logică, perspicacitate, perseverență. (Armand Martinov)

Probleme rezolvate

R1.1.6.1. La o discotecă au fost 74 de elevi, băieți şi fete. A doua zi, fetele au făcut o clasificare: Cristina a dansat cu un băiat, Alexandra cu 3 băieți, Laura cu 9 băieți, Raluca cu 10 băieți, Doina cu 11 băieți şi aşa mai departe, fiecare fată a avut un partener mai mult decât precedenta, până la ultima, Alina, care a dansat cu toți băieții? Câte fete şi câți băieți au fost?

Soluție. Comparăm enumerarea: Laura, Raluca, Doina, ..., Alina sau, cu alte denumiri: $F_1, F_2, F_3, ..., F_f$
cu 9, 10, 11,..., b băieți.

Rezultă că numărul băieților b este cu 8 mai mare decât al fetelor f. Aşadar (72-8):2=32 fete şi 40 de băieți. Inițial au fost 34 de fete şi 40 de băieți.

R1.1.6.2. În şapte cutii sunt batoane de ciocolată de câte 100 g. Printre ele sunt şi cutii cu batoane de ciocolată de 90 g. Printr-o singură cântărire să se determine aceste cutii, ştiind că toate batoanele sunt ambalate la fel.

Soluție. Din fiecare cutie se scoate un număr de batoane de ciocolată egal cu 2 ridicat la o putere egală cu numărul cutiei: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Dacă toate batoanele ar cântări câte 100 g, atunci ar avea împreună
$1\cdot100+2\cdot100+4\cdot100+8\cdot100+16\cdot100+32\cdot100+64\cdot100=12700$ g. Deoarece există şi batoane de ciocolată mai uşoare cu 10 g, diferența dintre 12700 şi masa indicată de cântar se împarte la 10. Numărul astfel obținut se scrie în mod unic ca sumă a numerelor $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$, luate o singură dată. Exponenții puterilor lui 2 reprezintă cutiile cu batoane de ciocolată mai uşoare.

Exemplu: Dacă batoanele cântăresc 12330 g, atunci
12700-12330=370, 370:10=37, iar $37 = 2^5 + 2^2 + 2^0$.
Cutiile cu batoanele de ciocolată de câte 90 g sunt cele pe care scrie 0, 2, 5.

R1.1.6.3. O persoană urcă treptele unei scări după regula: urcă 3 trepte coboară 2 trepte, urcă din nou 5 trepte şi coboară o treaptă.

a) După 736 paşi, pe ce treaptă se află persoana?

b) După câţi paşi ajunge pe treapta 736?

Soluţie. a) La 11 paşi persoana urcă 3-2+5-1=5 trepte.

Pentru că 736=11·66+10, rezultă că persoana face la 11·66 paşi 5·66=330 trepte, iar la încă 10 paşi face 3-2+5=6 trepte, total 336 trepte.

b) Pentru că 736=5·147+1, numărul de paşi se află 147·11+1=1618 paşi.

R1.1.6.4. Se dau nouă monede de aceeaşi valoare. Dacă opt au aceeaşi masă şi una este falsă, fiind mai uşoară, să se stabilească prin două cântăriri moneda falsă, având la dispoziţie o balanţă.

Soluţie. Împărţim cele 9 monede în 3 grupe de câte 3 monede. Prima cântărire: Aşezăm pe cele două talere ale balanţei câte o grupă. Dacă balanţa este în echilibru moneda falsă se află în a treia grupă. Dacă balanţa se înclină, atunci moneda falsă se află pe talerul care se ridică. Astfel am stabilit grupa în care se găseşte moneda falsă.

A doua cântărire: Din grupa cu moneda falsă luăm două monede pe care le aşezăm pe talerele balanţei. Dacă balanţa este în echilibru, moneda falsă este cea de a treia (rămasă). Dacă balanţa se înclină, moneda falsă este pe talerul care se ridică.

R1.1.6.5. Cum putem aduce 6 l de apă de la râu dacă dispunem numai de două vase: unul de 4 l şi altul de 9 l?

Soluţie. Umplem vasul de 9 l şi turnăm din el în vasul de 4 l până îl umplem, de două ori. În vasul de 9 l a rămas 1 l. Golim vasul de 4 l şi punem în el litrul rămas. Vasul de 9 l rămas gol îl umplem. Punem din el apă în vasul de 4 l până acesta se umple (putem pune numai 3 l, 1 l era deja acolo) şi în vasul de 9 l au rămas 6 l.

R1.1.6.6. **Un calcul mintal**. Ridicaţi la pătrat, fără hârtie şi creion, numărul 85.

Soluţie. Fie numărul $\overline{a5}$. Avem

$$\overline{a5}^2 = \overline{a5}\cdot(10a+5) = \overline{a5}\cdot 10a + \overline{a5}\cdot 5 = (10a+5)\cdot 10a + (10a+5)\cdot 5 =$$

$$= 100a^2 + 50a + 50a + 25 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a+1) + 25,$$

deci $\overline{a5}^2 = 100a(a+1) + 25$. Folosind acest procedeu

$$85^2 = 100\cdot 8\cdot 9 + 25 = 7225.$$

R1.1.6.7. **Turneul de tenis.** La un turneu de tenis de tip eliminatoriu participă *n* jucători. Câte meciuri trebuie jucate (sau câştigate prin neprezentare) pentru a şti cine este câştigătorul?

Soluţie. În fiecare meci există un învins. Fiecare jucător, în afară de cel care câştigă turneul trebuie să fie învins o singură dată. Vor fi $n-1$ învinşi, prin urmare vor fi $n-1$ meciuri.

R1.1.6.8. Cereţi unui prieten să-şi aleagă un număr format din 3 cifre cu cifra unităţilor diferită de 0. Cereţi să scrie şi răsturnatul numărului, apoi să scadă numărul mai mic din numărul mai mare; diferenţa obţinută să o adune cu răsturnatul său. Fără a adresa alte întrebări putem spune care este rezultatul obţinut. Justificaţi raţionamentul.

Soluție. Fie $\overline{abc}$ numărul şi $\overline{cba}$ răsturnatul său. Presupunem $a > c$. Efectuând calculele $\overline{abc} - \overline{cba} = (100a + 10 + c) - (100c + 10b + a)$ vom obține $\overline{abc} - \overline{cba} = 99(a-c) = 100(a-c) - (a-c) = \overline{(a-c)00} - (a-c) =$ $= \overline{(a-c-1)9(10-a+c)}$; cifra sutelor este $a-c-1$, cifra zecilor este 9 şi cifra unităților este $10-a+c$.

Adunând diferența obținută cu răsturnatul său se obține

$$100(a-c-1) + 90 + 10 - a + c + 100(10-a+c) + 90 + a - c - 1 =$$
$$= 100a - 100c - 100 + 100 - a + c + 1000 - 100a + 100c + 90 + a - c - 1 = 1089,$$

oricare ar fi cifrele numărului ales.

1.2. Şiruri. Sume

O importanță deosebită o au în clasa a V-a problemele de numărare a termenilor unui şir, de determinare a formei generale sau a regulii de formare a termenilor unui şir, de aflare a sumei primilor *n* termeni dintr-un şir, de determinare a termenului de pe locul *n* dintr-un şir.

Prima problemă ce se ridică este următoarea:

- Fiind dat şirul $a_1, a_2, a_3, \ldots$ să se completeze cu încă *p* termeni, $p \in \mathbf{N}^*$.

Să se completeze cu încă trei termeni următoarele şiruri:

1) 14, 15, 16,...
2) 8, 10, 12,...
3) 13, 15, 17,...
4) 5, 8, 11,...
5) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8,...
6) 0, 1, 1, 2, 4, 8, 16,...
7) 1, 2, 6, 24, 120,...
8) 1, 3, 7, 5,...
9) 61, 52, 63,...

Soluție. 1) Numerele din primul şir sunt consecutive. Şirul se completează cu 17, 18, 19.

2) Numerele din al doilea şir sunt pare consecutive. Şirul se completează cu 14, 16, 18.

3) Numerele din al treilea şir sunt impare consecutive. Şirul se completează cu 19, 21, 23.

4) Numerele din al patrulea şir se formează după regula $a_n = a_{n-1} + 3$, $n \in \mathbf{N}^*$ ($a_1 = 5$, $a_2 = 5 + 3 = 8$, $a_3 = 8 + 3 = 11$). Şirul se completează cu 14, 17, 20.

5) Numerele din al cincilea şir se formează după regula: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = a_1 + a_2$, $a_4 = a_2 + a_3$, $a_5 = a_3 + a_4$, $a_6 = a_4 + a_5$; în general $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 2$. Şirul se completează cu 13, 21, 34.

6) Numerele din al şaselea şir se formează după regula: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = a_1 + a_2$, $a_4 = a_1 + a_2 + a_3$, $a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, $a_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$; în general $a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1}$, $n > 2$. Şirul se completează cu 32, 64, 128.

7) Numerele din şirul al şaptelea se formează după regula: $a_1 = 1$, $a_2 = 2 \cdot 1$, $a_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1$, $a_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, $a_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$; în general $a_n = n(n-1)(n-2)...3 \cdot 2 \cdot 1$, $n \geq 1$. Acesta se notează cu *n*! şi se numeşte factorial. Şirul se completează cu 6!, 7!, 8!, adică 6·5·4·3·2·1, 7·6·5·4·3·2·1, 8·7·6·5·4·3·2·1, adică 720, 5040, 40320.

Observaţie. Regula de formare mai poate fi scrisă şi astfel: $a_1 = 1$, $a_2 = 2 \cdot a_1$, $a_3 = 3 \cdot a_2$, $a_4 = 4 \cdot a_3$, $a_5 = 5 \cdot a_4$; în general $a_n = n \cdot a_{n-1}$, $n \geq 2$.

8) Numerele din şirul al optulea se formează după regula $a_1 = u(2^1 - 1)$, $a_2 = u(2^2 - 1)$, $a_3 = u(2^3 - 1)$, $a_4 = u(2^4 - 1)$; în general $a_n = u(2^n - 1)$, adică ultima cifră a numărului $2^n - 1$. Ultimele cifre ale puterilor $2^5, 2^6, 2^7$ sunt 2, 4, 8, deci şirul se completează cu 1, 3, 7.

9) Numerele din al nouălea şir sunt răsturnatele numerelor $4^2, 5^2, 6^2, ...$ Deci şirul se completează cu 94, 46, 18.

• O altă problemă care se poate pune este numărarea elementelor dintr-un şir.

Să se determine numărul de numere naturale din următoarele şiruri:

a) 15, 16, 17,..., 30
b) 2, 4, 6,..., 54
c) 4, 7, 10,..., 76
d) 2, 7, 12,..., 77

Soluţie. Şirul a) conţine 30-15+1=16 numere.

Şirul b) conţine termeni de forma 2·1, 2·2, 2·3,..., 2·27, deci conţine 27 termeni sau (54-2):2+1=27.

Şirul c) are termeni de forma 3·1+1, 3·2+1, 3·3+1,..., 3·25+1, deci conţine 25 termeni sau (76-4):3+1=25.

Şirul d) are termeni de forma 5·0+2, 5·1+2, 5·2+2,..., 5·15+2, deci conţine 16 termeni sau (77-2):5+1=16.

În exerciţii apar foarte multe sume finite de numere naturale. De aceea vom prezenta câteva moduri de calcul a unor sume finite.

Un mod ingenios de a aplica proprietăţile adunării a fost descoperit de un copil. Acest copil care a devenit unul dintre marii matematicieni ai lumii, se numea Karl Friedrich Gauss (1777-1855).

Vom folosi procedeul lui Gauss pentru a aduna numere consecutive:

Să se determine suma primelor *n* numere naturale.

Soluţie. Fie $S = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n$ şi $S = n + (n-1) + ... + 2 + 1$. Adunând membru cu membru se obţine $2 \cdot S = (n+1) \cdot n$ sau $S = n(n+1) : 2$.

Procedeul se bazează pe tehnica lui Gauss de a aduna primul număr cu ultimul, al doilea cu penultimul etc., sumele obținute fiind egale.

Remarcă. Formula dedusă mai sus este foarte utilă în exerciții.

Formula se poate aplica imediat pentru calculul sumei primelor 10, 100, 1000 numere naturale:

1+2+3+...+10=10·11:2=55

1+2+3+...+100=100·101:2=5050

1+2+3+...+1000=1000·1001:2=500500

Probleme rezolvate

R1.2.1. Fie şirul de numere naturale: 1, 5, 9, 13,...

a) Completaţi şirul cu încă trei termeni.

b) Găsiți al 155-lea, al 378-lea, al 2003-lea număr.

c) Justificați care dintre următoarele numere fac parte din şir: 497, 531, 794, 1073. Precizați locul în şir, dacă e cazul.

d) Calculaţi suma primilor 20 termeni.

Soluție. a) Următorii 3 termeni sunt 13+4=17, 17+4=21, 21+4=25.

b) Termenii din şir au forma $a_n = 4\cdot(n-1)+1$, $n \in \mathbf{N}$ (4·0+1, 4·1+1, 4·2+1,...). Al 155-lea termen este 4·154+1=617. Al 378-lea termen este 4·377+1=1509. Al 2003-lea termen este 4·2002+1=8009.

c) 497=4·124+1 $\Rightarrow$ 497 face parte din şir este al 125-lea termen.

531=4·132+3 $\Rightarrow$ 531 nu face parte din şir.

794=4·198+2 $\Rightarrow$ 794 nu face parte din şir.

1073=4·268+1 $\Rightarrow$ 1073 face parte din şir; este al 269-lea termen.

d) Primii 20 de termeni sunt 4·0+1, 4·1+1, 4·2+1,..., 4·19+1. Deci *S*=1+5+9+...+77 şi *S*=77+78+...+1. Adunând membru cu membru 2*S*=78·20, deci *S*=78·10=780.

O altă metodă de calcul a sumei *S* este:

S=(4·0+1)+(4·1+1)+(4·2+1)+...+(4·19+1)=
=(4·0+4·1+4·2+...+4·19)+20·1=4(1+2+...+19)+20=
=4·19·20:2+20=760+20=780.

R1.2.2. Fie şirul de numere naturale 1, 2·3, 4·5·6, 7·8·9·10,...
Să se determine al 7-lea şi al 100-lea termen al şirului.

Soluție. Se observă că termenul a_n este produs de *n* numere naturale consecutive. Trebuie să deducem forma ultimului factor în funcție de locul al *n*-lea din şir. Ultimul număr din a_n verifică relația $n(n+1):2$.

Ultimul număr din al 7-lea termen va fi 7·8:2, adică 28; deci al 7-lea termen va fi produs a 7 numere consecutive, ultimul fiind 28. Al 7-lea termen va fi 22·23·24·25·26·27·28. Ultimul număr din al 100-lea termen va fi 100·101:2=5050. Termenul al 100-lea va fi produsul a 100 numere consecutive dintre care ultimul este 5050. Al 100-lea termen este 4951·4952·...·5050.

R1.2.3. Fie numărul A=1234567891011121314...20022003.

a) Aflați câte cifre are numărul A.

b) Care este a 2000-a cifră a numărului A?

Soluție. a) Sunt 9 numere de o cifră, 99-10+1=90 numere de 2 cifre, 999-100+1=900 numere de 3 cifre şi 2003-1000+1=1004 numere de 4 cifre. În total sunt 9+90·2+900·3+1004·4=6905 cifre.

b) Pentru scrierea numerelor de o cifră şi 2 cifre se folosesc 189 cifre. Rămân 2000-189=1811 cifre pentru a scrie numere de 3 cifre. Dar, 1811=3·603+2, rezultă că a 2000-a cifră este a 2-a cifră a celui de al 604-lea număr natural de 3 cifre, a 2-a cifră a lui 703, deci 0.

R1.2.4. Fie $A=9+99+999+...+\underbrace{999...99}_{\text{2003 cifre}}$. Câte cifre de 1 are A?

Soluție. Se poate scrie

$A=(10-1)+(100-1)+(1000-1)+(1\underbrace{00...00}_{\text{2003 cifre}}-1)$ sau

$A=10+100+1000+...+1\underbrace{00.00}_{\text{2003 cifre}}-1\cdot 2003$; avem $A=\underbrace{111...111}_{\text{2003 cifre}}0-2003$.

Efectuând scăderea $A=\underbrace{111...109107}_{\text{total 2004 cifre}}$. Numărul A are 2004 cifre, dintre care 4 sunt diferite de 1, deci A are 2000 cifre de 1.

R1.2.5. Calculați următoarele sume:

a) S=111+222+...+999

b) S=9+19+29+...+1999

c) S=3+5+7+...+2001-2-4-6-...-2000

Soluție. a) Se dă factor comun 111. Avem S=111·(1+2+...+9)=111·(9·10:2), deci S=4995.

b) S se poate scrie: S=9+(10·1+9)+(10+2+9)+...+(10·199+9). S are 200 termeni. Aplicând proprietățile adunării, grupăm S=9·200+10(1+2+...+199). Avem S=1800+10·(199·200:2) adică S=200800.

c) S se poate scrie grupând termenii câte 2, fiind 1000 numere impare şi 1000 numere pare, deci vom obține 1000 grupuri.
S=(3-2)+(5-4)+(7-6)+...+(2001-2000)=1000.

R1.2.6. Calculați următoarele sume:

a) S=1·2+2·3+...+19·20

b) S=1·2·3+2·3·4+...+18·19·20.

Soluție. a) Fie 3·S=1·2·3+2·3·3+...+19·20·3; putem scrie mai departe 3·S=1·2·(3-0)+2·3·(4-1)+...+19·20·(21-18). Efectuând calculele vom avea 3·S=1·2·3-1·2·0+2·3·4-1·2·3+...+19·20·21-18·19·20, deci 3·S=19·20·21 sau S=19·20·7, adică S=2660.

b) În mod asemănător vom proceda şi la b):
4·S=1·2·3·4-0·1·2·3+2·3·4·5-1·2·3·4+...+18·19·20·21-17·18·19·20
iar prin efectuarea calculelor se obține 4·S=18·19·20·21 sau S=18·19·5·21, adică S=35910.

Generalizare. $1\cdot 2+2\cdot 3+...+n(n+1)=n(n+1)(n+2):3$

$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+...+n(n+1)(n+2)=n(n+1)(n+2)(n+3):4$.

1.3. Teorema împărțirii cu rest

Oricare ar fi numerele naturale *a* şi *b*, cu $b\neq 0$, există două numere naturale *q* şi *r*, numite cât, respectiv rest, astfel încât $a=bq+r$, $r<b$.

Numerele determinate în acest condiții sunt unice.

Proprietatea de mai sus se numeşte teorema împărțirii întregi sau teorema împărțirii cu rest.

Resturile posibile la împărțirea la numărul natural *b*, $b\neq 0$ sunt 0,1,2,...,*b*-1.

Remarcă. Dacă două numere naturale dau acelaşi rest la împărțirea cu un alt număr natural, diferența lor se împarte exact la acel număr.

Modele. a) Să se afle cel mai mic număr natural de trei cifre, ştiind că dacă îl împărțim la un număr de o cifră, obținem restul 8.

b) Să se afle suma tuturor numerelor naturale de trei cifre care împărțite la un număr de o cifră dau restul 8.

Soluție. a) Se ştie că restul este mai mic decât împărțitorul. Dacă restul este 8, singurul număr de o cifră care poate fi împărțitor este 9. Cel mai mic număr de 3 cifre, care la împărțirea cu 9 dă restul 8 este 9·11+8=107.

b) Numerele căutate sunt 9·11+8, 9·12+8, 9·13+8,..., 9·110+8, adică 107, 116, 125,..., 998; sunt 100 de numere. Suma acestor numere este
9·(11+12+13+...+110)+8·100=9·121·100:2+800=55250.

Probleme rezolvate

R1.3.1. Suma a două numere este 340. Dacă împărțim numărul mai mare la jumătatea numărului mic obținem câtul 3 şi restul 25. Aflați numerele.

Soluție. Se combină teorema împărțirii cu rest cu metoda figurativă de rezolvare a problemelor de aritmetică:

|——|——| reprezintă numărul mic

25

|——|——|——|——| reprezintă numărul mai mare.

Pentru a afla jumătatea numărului mic efectuăm (340-25):5=631 deci numărul mic este 63·2=126, iar numărul mare este 3·63+25=214.

R1.3.2. Câte numere de 3 cifre există cu proprietatea că împărțite la un număr de 2 cifre dau restul 97?

Soluție. Se ştie că restul este mai mic decât împărțitorul. Dacă restul este 97 şi împărțitorul are 2 cifre, atunci acesta poate fi 98 sau 99. Numerele căutate sunt de 3 cifre şi au forma 98·c+97 sau 99·c+97. Ele sunt

98·1+97, 98·2+97,..., 98·9+97

99·1+97, 99·2+97,..., 99·9+97, total 18 numere.

R1.3.3. Scriem şirul numerelor naturale impare fără să le separăm. Să se determine a 2003-a cifră.

Soluţie. Se scrie şirul numerelor naturale impare:

1351113...99101103...9991001003...

Sunt 5 numere impare de o cifră, sunt 45 numere impare de 2 cifre ((99-11):2+1=45), sunt 450 de numere impare de 3 cifre ((999-101):2+1=450). Pentru scrierea acestor numere s-au folosit 5+2·45+3·450=1445 cifre. A 2003-a cifră este o cifră dintr-un număr impar de 4 cifre; 2003-1445=558 cifre se folosesc până la a 2003-a cifră.

558=4·139+2, deci a 2003-a cifră va fi a 2-a cifră a celui de al 140-lea număr impar de 4 cifre; cele 140 numere impare au forma:

1001+2·0, 1001+2·1, 1001+2·2, 1001+2·3,..., 1001+2·139,

deci al 140-lea număr impar este 1279, a doua sa cifră va fi a 2003-a cifră a şirului, deci 2.

R1.3.4. Împărţind pe *n* la 84 obţinem restul 56. Ce rest obţinem dacă împărţim pe *n* la 12?

Soluţie. Se scrie teorema împărţirii cu rest: $n = 84c + 56$. Avem 84=12·7 şi 56=4·12+8, de unde obţinem

$n = 12 \cdot 7c + 4 \cdot 12 + 8 = 12(7c+4) + 8$,

deci restul împărţirii lui *n* la 12 este 8.

R1.3.5. Să se afle numerele nenule care împărţite la 4, dau câtul *a* şi restul *b*, iar împărţite la 10 dau câtul *b* şi restul *a*.

Soluţie. Se scrie teorema împărţirii cu rest. Fie *x* numărul căutat $x = 4a + b$, $b < 4$ şi $x = 10b + a$, $a < 10$. Avem $4a + b = 10b + a$ sau $3a = 9b$, deci $a = 3b$, relaţie verificată de $a = 3$, $b = 1$ sau $a = 6$, $b = 2$ sau $a = 9$, $b = 3$. Numerele cerute sunt 13, 26 şi 39.

R1.3.6. Un număr de 3 cifre are primele două cifre identice, iar a treia cifră este 5. Acest număr se împarte la un număr de o singură cifră şi se obţine restul 8. Să se găsească deîmpărţitul, împărţitorul şi câtul.

Soluţie. Se ştie că restul este mai mic decât împărţitorul. Dacă restul este 8 şi împărţitorul are o cifră, acesta este 9. Se scrie teorema împărţirii cu rest: $\overline{aa5} = 9x + 8$, unde s-a notat câtul cu *x*. Avem $\overline{aa0} + 5 = 9x + 8$ sau $\overline{aa0} = 9x + 3$, de unde rezultă că $9x$ trebuie să fie printre numerele 107, 217, 327, 437, 547, 657, 767, 877, 987. Singurul număr care se împarte exact la 9, din acest şir, este 657, rezultă că $\overline{aa0} = 660$, deci deîmpărţitul este 665, împărţitorul este 9, iar câtul este 73.

1.4. Puterea cu exponent natural a unui număr natural

În acest paragraf vom avea nevoie de următoarele definiţii şi proprietăţi învăţate în cadrul orei de matematică:

1) $a, n \in \mathbf{N}$, $a^n = \underbrace{a \cdot a ... a}_{n\ factori}$, $a^0 = 1$, $a^1 = 1$ şi 0^0 nu are sens

a se numeşte bază, *n* se numeşte exponent.

2) Toate puterile naturale ale lui 1 sunt egale cu 1.

3) Toate puterile cu exponent natural nenul ale lui 0 sunt egale cu 0.

4) Dacă a, b, m, n sunt numere naturale:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m : a^n = a^{m-n} \ (m \geq n), \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

5) Ridicarea la putere nu este operaţie comutativă, nici asociativă.

6) O deosebită importanţă în rezolvarea problemelor au puterile lui 10. Acestea se folosesc pentru a compara şi a scrie mai uşor numere naturale foarte mari:

$$10^n = 1\underbrace{00...0}_{n\ zerouri}, \quad 10^n = 2^n \cdot 5^n$$

1.4.1. Calculul ultimei/penultimei cifre a unei expresii numerice cu puteri, a unui produs

Pentru a determina ultima/penultima cifră a unei expresii numerice cu puteri trebuie remarcate următoarele:

1) Toate puterile cu baza 5 sau un număr a cărui ultimă cifră este 5 au ultima cifră 5.

2) Toate puterile cu baza 6 sau un număr a cărui ultimă cifră este 6 au ultima cifră 6.

3) Toate puterile unui număr natural care are ultima cifră 1 au şi ele ultima cifră 1.

4) Toate puterile unui număr natural care are ultima cifră 0 au şi ele ultima cifră 0; mai mult, aceste puteri vor avea un număr de zerouri egal cu exponentul (dacă penultima cifră a numărului este diferită de 0).

5) Notăm $u(a)$ ultima cifră a numărului *a*, $a \in \mathbf{N}$. Dacă *k* este natural:

$u(2^{4k+1}) = 2$, $u(2^{4k+2}) = 4$, $u(2^{4k+3}) = 8$, $u(2^{4(k+1)}) = 6$

$u(3^{4k+1}) = 3$, $u(3^{4k+2}) = 9$, $u(3^{4k+3}) = 7$, $u(3^{4(k+1)}) = 1$

$u(7^{4k+1}) = 7$, $u(7^{4k+2}) = 9$, $u(7^{4k+3}) = 3$, $u(7^{4(k+1)}) = 1$

$u(8^{4k+1}) = 8$, $u(8^{4k+2}) = 4$, $u(8^{4k+3}) = 2$, $u(8^{4(k+1)}) = 6$

Regulile de mai sus se pot desprinde scriind şirul puterilor naturale cu bazele 2, 3, 7 şi 8.

În mod asemănător deducem

$$u(4^{2k+1}) = 4, \ u(4^{2(k+1)}) = 6 \text{ şi } u(9^{2k+1}) = 9, \ u(9^{2(k+1)}) = 1.$$

Remarcă. Dacă *n* este un număr natural n^4 are ultima cifră 0, 1, 5 sau 6.

Observaţie. Aceste reguli se păstrează şi pentru bazele care au ultima cifră 2, 3, 7, 8, 4 sau 9.

Model 1. Să se determine ultima cifră a următoarelor numere:

$$A = 4^{1995} + 2^{1996} + 3^{1997} + 6^{1998} + 7^{1999} + 9^{2000}$$

$$B = 2000^{2000} + 2001^{2001} + 2002^{2002} + 2003^{2003} + 2004^{2004} + 2005^{2005}$$

Soluţie. Aplicând regulile stabilite mai sus, avem:

$u(4^{1995}) = u(4^{1994+1}) = u(4^{2\cdot 997+1}) = 4$, $u(2^{1996}) = u(2^{4\cdot 499}) = 6$

$u(3^{1997}) = u(3^{1996+1}) = u(3^{4\cdot 499+1}) = 3$, $u(6^{1998}) = 6$

$u(7^{1999}) = u(7^{1996+3}) = u(7^{4\cdot 999+3}) = 3$, $u(9^{2000}) = u(9^{2\cdot 1000}) = 1$

Deci, $u(A) = u(4+6+3+6+3+1) = 3$.

Procedând în mod analog pentru termenii lui *B*, avem:

$u(2000^{2000}) = 0$, $u(2001^{2001}) = 1$, $u(2002^{2002}) = u(2^{2002}) = u(2^{4\cdot 500+2}) = 4$

$u(2003^{2003}) = u(3^{2003}) = u(3^{4\cdot 500+3}) = 7$, $u(2004^{2004}) = u(4^{2004}) = u(4^{2\cdot 1002}) = 6$

şi $u(2005^{2005}) = u(5^{2005}) = 5$.

Deci, $u(B) = u(0+1+4+7+6+5) = 3$.

Model 2. Să se determine ultimele două cifre ale numărului $N = 7^{32} + 7^{30}$.

Soluție. Se observă că $N = 7^{30}(7^2+1) = 7^{30}\cdot 50 = 7^{30}\cdot 5\cdot 10$, deci ultima cifră a lui *N* este 0, iar cifra zecilor lui *N* este $u(7^{30}\cdot 5)$, deci $u(7^{4\cdot 7+2}\cdot 5) = u(9\cdot 5) = 5$. Rezultă că ultimele două cifre ale lui *N* sunt 5 şi 0. $(N = \overline{***...*50})$

Model 3. Să se determine ultimele trei cifre ale numărului

$$N = 2^{2000} - 2^{1998} + 2^{1995}.$$

Soluție. Se scrie

$$N = 2^{1995}(2^5 - 2^3 + 1) = 2^{1995}\cdot 25 = 2^{1993}\cdot 2^2\cdot 5^2 = 2^{1993}\cdot 100$$

N are ultimele două cifre 0, iar cifra sutelor este $u(2^{1993})$, adică $u(2^{4\cdot 498+1}) = 2$. Rezultă că ultimele 3 cifre ale lui *N* sunt 2, 0, 0 $(N = \overline{**...*200})$.

Probleme rezolvate

R1.4.1.1. Să se determine ultima cifră a numărului:

$$N = 1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + ... + 20^{20}$$

Soluție. Determinăm ultima cifră a fiecărui termen, aplicând regulile de mai sus şi grupăm câte doi din termenii sumei:

$u(2^2) + u(12^{12}) = u(4+6) = 0$, $u(3^3) + u(13^{13}) = u(7+3) = 0$,

$u(5^5) + u(15^{15}) = u(5+5) = 0$, $u(7^7) + u(17^{17}) = u(3+7) = 0$

$u(8^8) + u(18^{18}) = u(6+4) = 0$ şi $u(1^1) + u(11^{11}) = 2$, $u(10^{10}) + u(20^{20}) = 0$

$u(4^4) + u(14^{14}) = u(6+6) = 2$, $u(6^6) + u(16^{16}) = u(6+6) = 2$,

$u(9^9) + u(19^{19}) = 2$.

Însumând rezultatele obținute, rezultă că ultima cifră a lui *N* este 8.

R1.4.1.2. Să se determine ultimele două cifre ale numărului:

$$a = 1991^2 \cdot 1992^2 \cdot 1993^2 \cdot ... \cdot 1999^2.$$

Soluție. Se poate scrie $a = (1991 \cdot 1992 \cdot 1993 \cdot 1994 \cdot 1995 \cdot ... \cdot 1999)^2$. Ultima cifră a numărului $1991 \cdot 1992 \cdot 1993 \cdot 1994 \cdot 1995 \cdot ... \cdot 1999$ este 0, care provine din 1992·1995, deci ultimele două cifre ale lui a sunt egale cu 0 $(a = \overline{**...*00})$, a fiind pătratul unui număr natural care are ultime cifră 0.

R1.4.1.3. Să se determine ultima cifră a următoarelor numere:

$$A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{50} \quad \text{şi} \quad B = 4 + 4^2 + 4^3 + ... + 4^{201}$$

Soluție. Aceste exerciții se bazează pe următoarele proprietăți:

$$u(3^{4k+1}) + u(3^{4k+2}) + u(3^{4k+3}) + u(3^{4k}) = u(3 + 9 + 7 + 1) = 0 \text{ şi}$$

$$u(4^{2k+1}) + u(4^{2(k+1)}) = u(4 + 6) = 0.$$

În prima sumă grupăm termenii câte 4, iar în a doua sumă grupăm termenii câte 2. Vom avea:

$u(A) = u(1 + 3^{49} + 3^{50}) = u(1 + 3 + 9) = 3$ şi $u(B) = u(4^{201}) = 4$

Remarcă. În exercițiile în care trebuie determinată ultima cifră a unei sume de puteri consecutive ale unui număr natural este bine să aplicăm gruparea termenilor, după următoarea regulă:

$u(2^{4k+1}) + u(2^{4k+2}) + u(2^{4k+3}) + u(2^{4(k+1)}) = u(2 + 4 + 8 + 6) = 0$

$u(3^{4k+1}) + u(3^{4k+2}) + u(3^{4k+3}) + u(3^{4(k+1)}) = u(3 + 9 + 7 + 1) = 0$

$u(7^{4k+1}) + u(7^{4k+2}) + u(7^{4k+3}) + u(7^{4(k+1)}) = u(7 + 9 + 3 + 1) = 0$

$u(8^{4k+1}) + u(8^{4k+2}) + u(8^{4k+3}) + u(8^{4(k+1)}) = u(8 + 4 + 2 + 6) = 0$

$u(4^{2k+1}) + u(4^{2(k+1)}) = u(4 + 6) = 0$

$u(5^k) + u(5^{k+1}) = u(5 + 5) = 0$

$u(9^{2k+1}) + u(9^{2(k+1)}) = u(9 + 1) = 0$

$u(6^{5k+1}) + u(6^{5k+2}) + u(6^{5k+3}) + u(6^{5k+4}) + u(6^{5(k+1)}) = u(6 + 6 + 6 + 6 + 6) = 0$.

R1.4.1.4. Se consideră şirul de numere naturale:

1, 3, 7, 15, 31, 63,...

Aflați ultima cifră a numărului de pe locul 2003.

Soluție. Regula de formare a şirului este $a_1 = 2^1 - 1$, $a_2 = 2^2 - 1$, $a_3 = 2^3 - 1$; $a_4 = 2^4 - 1$, $a_5 = 2^5 - 1$, $a_6 = 2^6 - 1$; în general $a_n = 2^n - 1$. Numărul de pe locul 2003 este $a_{2003} = 2^{2003} - 1$ şi are ultima cifră egală cu $u(2^{2003} - 1) = u(8 - 1) = 7$.

R1.4.1.5. Câte zerouri are la sfârşit numărul $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 100$.

Soluție. Se ține cont că $10^n = 2^n \cdot 5^n$ şi că este suficient să numărăm aparițiile cu 5 în N (aparițiile lui 2 sunt mai multe). Numerele care se împart exact la 5 sunt 5, 10,..., 100, în total 20, numerele care se împart exact la 5^2 sunt 25, 50, 75, 100, în total 4, iar numere care se împart exact la 5^3 nu sunt în acest produs. Rezultă că numărul N se împarte exact la 5^{24}, el se împarte exact şi la 2^{24}, deci numărul are 24 de zerouri, fiind de forma $2^{24} \cdot 5^{24} \cdot n \ (n \in \mathbf{N})$.

R1.4.1.6. Să se determine ultima cifră a numărului

$$N = 3^{2002} - 2\cdot 3^{2001} - 2\cdot 3^{2000} - ... - 2\cdot 3^{1002}$$

Soluție. În rezolvarea acestui exercițiu se poate aplica următoarea observație: $3^{n+1} - 2\cdot 3^n = 3^n(3-2) = 3^n$, $n \in \mathbf{N}$. Avem $3^{2002} - 2\cdot 3^{2001} = 3^{2001}$, $3^{2001} - 2\cdot 3^{2000} = 3^{2000}$,..., $3^{1003} - 2\cdot 3^{1002} = 3^{1002}$, deci $u(N) = u(3^{1002}) = 9$.

1.4.2. Calculul sumei puterilor consecutive ale unui număr natural

Pentru a calcula suma puterilor consecutive cu baza 2 se poate folosi proprietatea $2^n + 2^n = 2^{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$.

Model 1. Să se afle suma $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{2002} + 2^{2003}$.

Soluție. Folosind proprietatea enunțată mai sus vom calcula $S + 1$:

$S + 1 = 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{2002} + 2^{2003} =$

$= 2 + 2 + 2^2 + 2^4 + ... + 2^{2002} + 2^{2003} = 2^2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{2002} + 2^{2003} =$

$= 2^3 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{2002} + 2^{2003} = 2^4 + 2^4 + ... + 2^{2002} + 2^{2003} = ... =$

$= 2^{2002} + 2^{2002} + 2^{2003} = 2^{2003} + 2^{2003} = 2^{2004}$.

Dacă $S + 1 = 2^{2004}$, rezultă că $S = 2^{2004} - 1$.

Generalizare. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$, $n \in \mathbf{N}$.

Remarcă. Calculul sumei $2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n+1}$ se face dând factor comun pe 2 şi aplicând generalizarea:

$$2(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n) = 2(2^{n+1} - 1)$$

Generalizare.

$2^p + 2^{p+1} + 2^{p+2} + ... + 2^{p+n} = 2^p(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n) = 2^p(2^{n+1} - 1)$, $n, p \in \mathbf{N}^*$

Model 2. Problema care se pune este de a calcula suma

$$S = 1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{n-1} + a^n,\ n \in \mathbf{N},\ a \in \mathbf{N}^*$$

Soluție. Se înmulţeşte această egalitate cu *a* (baza puterilor):

$$a\cdot S = a + a^2 + a^3 + a^4 + ... + a^n + a^{n+1}$$

Se face diferența $a\cdot S - S = a^{n+1} - 1$ sau $S(a-1) = a^{n+1} - 1$, deci $S = (a^{n+1} - 1) : (a-1)$.

Observație. Să se afle suma primelor 2003 puteri consecutive cu baza 3, 5, 8, 9:

$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{2003} = (3^{2004} - 1) : 2$

$1 + 5 + 5^2 + 5^3 + ... + 5^{2003} = (5^{2004} - 1) : 4$

$1 + 8 + 8^2 + 8^3 + ... + 8^{2003} = (8^{2004} - 1) : 7$

$1 + 9 + 9^2 + 9^3 + ... + 9^{2003} = (9^{2004} - 1) : 8$

Probleme rezolvate

R1.4.2.1. Să se determine numărul natural *n*, ştiind că

$$2+2^2+2^3+...+2^n=1022$$

Soluţie. Se ştie că $1+2+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$, deci $2+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-2$ şi egalitatea devine $2^{n+1}-2=1022$ sau $2^{n+1}=1024$, deci $2^{n+1}=2^{10}$; rezultă $n=9$.

R1.4.2.2. Comparaţi *a* şi *b*, dacă $a=2^{51}\cdot 2^{52}\cdot 2^{53}\cdot ...\cdot 2^{100}$ şi $b=1+2+2^2+2^3+...+2^{3774}$.

Soluţie. Aplicând reguli de calcul cu puteri $a=2^{51+52+53+...+100}$, deci $a=2^{151\cdot 50:2}$, efectuând $a=2^{3775}$.

Se ştie $1+2+2^2+...+2^n=2^{n+1}-1$, deci $b=2^{3775}-1$.

Rezultă că $a>b$.

R1.4.2.3. Scrieţi 2001^{2002} ca sumă de 2001 numere naturale consecutive.

Soluţie. $2001^{2002}=2001\cdot 2001^{2001}=(\underbrace{1+1+...+1}_{2001\text{ termeni}})\cdot 2001^{2001}=$

$$=\underbrace{2001^{2001}+2001^{2001}+...+2001^{2001}}_{2001\text{ termeni}}=$$

$$=(2001^{2001}-1000)+(2001^{2001}-999)+...+(2001^{2001}-1)+2001^{2001}+$$

$$+(2001^{2001}+1)+(2001^{2001}+1)+...+(2001^{2001}+1000).$$

R1.4.2.4. Aflaţi numărul natural *n*, ştiind că:

$$4+5^0+4\cdot 5+4\cdot 5^2+4\cdot 5^3+...+4\cdot 5^{5n-1}+2\cdot 5^{4n}=4375$$

Soluţie. Aplicăm formula învăţată

$$1+a+a^2+a^3+...+a^n=(a^{n+1}-1):(a-1)$$

şi egalitatea devine $4+1+4\cdot 5(1+5+5^2+...+5^{5n-2})+2\cdot 5^{4n}=4375$, sau

$5+4\cdot 5[(5^{5n-1}-1):4]+2\cdot 5^{4n}=4375$; avem mai departe

$5+5(5^{5n-1}-1)+2\cdot 5^{4n}=4375$ şi efectuând calculele $5^{5n}+2\cdot 5^{4n}=5^5+2\cdot 5^4$ (se scrie numărul 4375 în baza 5), de unde $n=1$.

R1.4.2.5. Determinaţi *n* natural, astfel încât:

$$(1+2^2+2^4+...+2^{1980})\cdot n=2+2^2+2^3+...+2^{1982}$$

Soluţie. Pentru a calcula suma $S=1+2^2+2^4+...+2^{1980}$ procedăm în felul următor: înmulţim egalitatea cu 2^2 şi avem

$2^2\cdot S=2^2+2^4+2^6+...+2^{1980}+2^{1982}$; scădem $2^2\cdot S-S$ şi vom obţine

$2^2\cdot S-S=2^{1982}-1$ sau $3S=2^{1982}-1$, $S=(2^{1982}-1):3$. Egalitatea devine:

$[(2^{1982}-1):3]\cdot n=2(1+2+2^2+...+2^{1981})$; avem mai departe

$[(2^{1982}-1):3]\cdot n=2(2^{1982}-1)$. Această egalitate se înmulţeşte cu 3 şi rezultă

$(2^{1982}-1)\cdot n=6(2^{1982}-1)$, adică $n=6$.

R1.4.2.6. Calculați suma $S=24\cdot 5^{2002}+8\cdot 3^{2001}+24\cdot 5^{2000}+$

$$+8\cdot 3^{1999}+...+24\cdot 5^4+8\cdot 3^3+24\cdot 5^2+8\cdot 3$$

Soluție. Deoarece bazele puterilor care apar sunt 3 şi 5 se scrie $24=25-1$ şi $8=9-1$. Avem

$S=(25-1)\cdot 5^{2002}+(9-1)\cdot 3^{2001}+(25-1)\cdot 5^{2000}+(9-1)\cdot 3^{1999}+...+$

$+(25-1)\cdot 5^4+(9-1)\cdot 3^3+(25-1)\cdot 5^2+(9-1)\cdot 3$. Efectuăm calculele:

$S=5^{2004}-5^{2002}+3^{2003}-3^{2001}+5^{2002}-5^{2000}+3^{2001}-3^{1999}+...+$

$+5^6-5^4+3^5-3^3+5^4-5^2+3^3-3$, deci $S=5^{2004}+3^{2003}-5^2-3$.

1.5. Pătrate perfecte. Cuburi perfecte

Numărul natural *n* este pătrat perfect dacă există un număr natural *a* astfel încât $n=a^2$.

Remarcă. Ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi 0, 1, 4, 5, 6 sau 9. De aici, deducem că un număr care are ultima cifră 2, 3, 7 sau 8 nu este pătrat perfect.

Este util să reținem următoarele:

1) Dacă numărul *n* este pătrat perfect şi dacă *p* este un număr prim care divide pe *n*, atunci p^2 divide pe *n*.

2) Între două pătrate perfecte a două numere consecutive nu se află un alt pătrat perfect.

Numărul natural *n* este cub perfect dacă există un număr natural *a* astfel încât $n=a^3$.

Model 1. Să se arate că numărul

$$A=2(1+2+3+...+2000+2001)+2002$$

este pătrat perfect.

Soluție. Pentru a arăta că *A* este pătrat perfect, pe baza definiției, trebuie scris $A=b^2$, *b* natural.

Aplicăm 1+2+3+...+2000+2001=2001·2002:2 şi avem *A*=2·(2001·2002:2)+2002 sau *A*=2001·2002+2002, se dă factor comun *A*=2002(2001+1), deci *A*=2002^2, pătrat perfect.

Model 2. Să se arate că următoarele numere nu sunt pătrate perfecte:

$$A=67^{38}+92^{43},\ B=5^{34}+5^{17},\ C=2^n\cdot 3^{n+1}+2^{n+1}\cdot 3^n,\ n\in\mathbf{N}.$$

Soluție. Pentru a arăta că *A* nu este pătrat perfect, determinăm ultima cifră a lui *A*. Ştim că $u(67^{38})=u(7^{4\cdot 9+2})=9$ şi

$u(92^{43})=u(2^{43})=u(2^{4\cdot 10+3})=8$; rezultă că $u(A)=u(9+8)=7$. Un număr care are ultima cifră 7 nu poate fi pătrat perfect.

Această metodă, de determinare a ultimei cifre, nu se poate aplica pentru a arăta că *B* nu este pătrat perfect, pentru că $u(B)=0$. Avem $B=5^{17}(5^{17}+1)$.

Observăm că $5^{17} \cdot 5^{17} < 5^{17} \cdot (5^{17}+1) < (5^{17}+1)(5^{17}+1)$ (deoarece $5^{17} < 5^{17}+1$), deci $(5^{17})^2 < B < (5^{17}+1)^2$; $(5^{17})^2$ şi $(5^{17}+1)^2$ sunt pătrate perfecte a două numere consecutive, deci *B* nu este pătrat perfect.

Pentru a arăta că *C* nu este pătrat perfect procedăm astfel: $C = 2^n \cdot 3^n \cdot (3+2)$ sau $C = 2^n \cdot 3^n \cdot 5$; *C* se divide cu 5, dar nu se divide cu 5^2, deci *C* nu este pătrat perfect.

Probleme rezolvate

R1.5.1. Arătaţi că suma primelor *n* numere naturale impare:

$$S = 1+3+5+...+2n-1,\ n \in \mathbf{N}^*$$

este pătrat perfect.

Soluţie. Se calculează *S* suma primelor *n* numere impare, făcând grupuri de câte 2 termeni şi avem $S = (2n-1+1)\cdot n : 2$ sau $S = 2n \cdot n : 2$, deci $S = n^2$ este pătrat perfect.

R1.5.2. Arătaţi că suma primelor *n* numere naturale pare

$S = 2+4+6+...+2n,\ n \in \mathbf{N}^*$

nu este pătrat perfect.

Soluţie. Calculăm $S = 2(1+2+3+...+n)$ sau $S = 2[n(n+1):2]$, deci $S = n(n+1)$. Se observă că $n \cdot n < n(n+1) < (n+1)(n+1)$, adică *S* este cuprinsă între două pătrate perfecte a două numere naturale consecutive, deci *S* nu este pătrat perfect.

R1.5.3. Determinaţi toate numerele naturale de 3 cifre scrise în baza 10, care adunate cu răsturnatele lor dau pătrate perfecte.

Soluţie. Dacă un număr de trei cifre este $\overline{abc}$, atunci răsturnatul lui este $\overline{cba}$ (*a, b, c* cifre). Deoarece $\overline{abc} + \overline{cba} = k^2$, rezultă succesiv $100a+10b+c+100c+10b+a = k^2$, $101a+20b+101c = k^2$, $101(a+c)+20b = k^2$. Ţinând cont că ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi 0, 1, 4, 5, 6 sau 9, rezultă:

$a+c=1, b=1$ sau $a=1, c=0, b=1$, adică $\overline{abc}=110$

$a+c=4, b=4$ sau $a=1, c=3, b=4$, adică $\overline{abc}=143$

$(k^2=484)$ $a=2, c=2, b=4$, adică $\overline{abc}=242$

$a=3, c=1, b=4$, adică $\overline{abc}=341$

$a+c=5, b=6$ sau $a=1, c=4, b=6$, $\overline{abc}=164$

$(k^2=625)$ $a=2, c=3, b=6$, $\overline{abc}=263$

$a=3, c=2, b=6$, $\overline{abc}=362$

$a=4, c=1, b=6$, $\overline{abc}=461$

$a + c = 6$ nu conduce la soluție pentru că 626, 646, 666, 686, 706, 726, 746, 766 şi 786 nu sunt pătrate perfecte.

$a + c = 9, b = 9$ sau $\quad a = 1, c = 8, b = 9 \Rightarrow \overline{abc} = 198$

$(k^2 = 1089) \quad a = 2, c = 7, b = 9 \Rightarrow \overline{abc} = 297$

$a = 3, c = 6, b = 9 \Rightarrow \overline{abc} = 396$

$a = 4, c = 5, b = 9 \Rightarrow \overline{abc} = 495$

$a = 5, c = 4, b = 9 \Rightarrow \overline{abc} = 594$

$a = 6, c = 3, b = 9 \Rightarrow \overline{abc} = 693$

$a = 7, c = 2, b = 9 \Rightarrow \overline{abc} = 792$

$a = 8, c = 1, b = 9 \Rightarrow \overline{abc} = 891$

R1.5.4. Să se afle numărul $\overline{ab}$, ştiind că $\overline{ab} + \overline{ba}$ este pătrat perfect şi $\overline{ab} - \overline{ba}$ este cub perfect.

Soluție. Scriem $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11(a + b)$ şi $\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 10a + b - 10b - a = 9(a - b)$.

$\overline{ab} + \overline{ba}$ este pătrat perfect, deci $a + b = 11$ şi $\overline{ab} - \overline{ba}$ este cub perfect, deci $a - b = 3$. Rezultă $a = 7$ şi $b = 4$, deci $\overline{ab} = 74$.

R1.5.5. Să se arate că $A = x^4 + 2(5y + 2)$ nu este pătrat perfect, oricare ar fi numerele naturale *x* şi *y*.

Soluție. Fie $A = x^4 + 10y + 2$. Se ştie că *x* fiind un număr natural, ultima cifră a lui x^4 poate fi numai 0, 1, 5 sau 6. Deci $u(x^4) \in \{0,1,5,6\}$, $u(10y) = 0$, deci $u(A) \in \{2,3,7,8\}$, rezultă că *A* nu poate fi pătrat perfect.

1.6. Sisteme de numerație

Sistemul de numerație cu baza 10 (sistemul zecimal)

Sistemul de numerație folosit cu precădere în practică este sistemul zecimal, adică sistemul cu baza 10. Baza unui sistem de numerație este numărul care arată câte unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat superior. Sistemul zecimal este pozițional. Acest sistem utilizează pentru scrierea numerelor zece semne (cifre arabe): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, de unde vine şi denumirea sistemului.

Un număr natural *N* se scrie în sistemul zecimal în mod unic sub forma: $N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ sau sub forma prescurtată $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$, unde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ sunt cifre, $0 \le a_i \le 9$, pentru orice $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, $n \in \mathbf{N}$, $a_n \neq 0$. Când cifrele unui număr sunt notate prin litere, atunci pentru a distinge acest număr de produsul acelor litere, îl vom supralinia. De exemplu, $\overline{abcd}$ înseamnă $a\cdot 10^3+b\cdot 10^2+c\cdot 10+d$, $a,b,c,d\in\{0,1,...,9\}$, $a\neq 0$.

Sisteme de numeraţie cu altă bază

Ca bază a unui sistem de numeraţie se poate alege orice număr natural mai mare decât 1.

S-au folosit şi se folosesc şi alte sisteme de numeraţie: caldeenii au folosit un sistem cu baza 60; de la acest sistem a rămas tradiţia împărţirii orei în 60 de minute şi a minutului în 60 de secunde. La popoare din America de Nord, America Centrală şi de Sud, Africa, au fost găsite sisteme de numeraţie cu bazele 5 şi 20.

Astfel, dacă alegem ca bază a unui sistem de numeraţie numărul $b\in\mathbf{N}, b\geq 2$, atunci exprimarea unui număr natural *N* în această bază se face, scriindu-l în mod unic, în felul următor:

(*) $$N=a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}+...+a_1b+a_0,$$

sau sub formă prescurtată $N=\overline{a_na_{n-1}...a_1a_0}_{(b)}$, unde $a_n,a_{n-1},...,a_1,a_0$ sunt cifrele numărului, astfel ca $0\leq a_i\leq b-1$, pentru orice $i\in\{0,1,...,n\}$, $n\in\mathbf{N}$, $a_n\neq 0$, iar indicele din paranteză, dreapta jos, reprezintă baza sistemului de numeraţie. În general, pentru scrierea numerelor în sistemul zecimal nu se specifică baza.

Numerele 1,2,...,*b*-1 se numesc şi cifre semnificative.

Orice număr natural scris sub forma (*) spunem că este scris sub formă sistematică (sau formă polinomială).

Exemplu. Numărul $2345_{(6)}$ se scrie sub formă sistematică în baza 6 astfel: $2345_{(6)}=2\cdot 6^3+3\cdot 6^2+4\cdot 6+5$.

Remarcă. Dacă baza unui sistem de numeraţie este mai mare decât 10, atunci se pot introduce simboluri noi pentru cifrele corespunzătoare numerelor 10, 11,..., *b*-1 sau acestea se pot scrie cu paranteze şi considerate ca cifre.

Exemplu. Dacă sistemul de numeraţie are baza 16 (sistem folosit în tehnica de calcul), semnele (cifrele) folosite pentru scrierea unui număr natural în această bază sunt: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,*A,B,C,D,E,F*, unde *A*=10, *B*=11, *C*=12, *D*=13, *E*=14, *F*=15.

Scrierea unui număr natural *N* în baza *b*, sub forma $N=\overline{a_na_{n-1}...a_1a_0}_{(b)}$ mai poartă denumirea de scriere poziţională, deoarece fiecare cifră ocupă o anumită poziţie (un anumit ordin) în reprezentarea numărului. Astfel, cifra a_0 indică unităţi de ordinul întâi, a_1 indică unităţi de ordinul doi ş.a.m.d., cifra a_n indică unităţi de ordinul $n+1$.

Observaţie. În sistemul de numeraţie cu baza *b*, o unitate de un ordin oarecare este formată din *b* unităţi de ordin inferior.

Exemplu. $678_{(9)}$ se citeşte şase şapte opt în baza 9 şi nu şase sute şaptezeci şi opt unităţi în baza 9.

Pentru unele sisteme de numerație se folosesc denumiri: sistem binar (baza 2), sistem ternar (baza 3), sistem octal (baza 8), sistem zecimal (baza 10), sistem hexazecimal (baza 16), sistem sexagesimal (baza 60) etc.

Dintre toate aceste sisteme de numerație, o importanță deosebită în tehnică o are sistemul binar, folosit la calculatoarele electronice.

Trecerea unui număr dintr-un sistem de numerație în alt sistem de numerație

Pentru a trece numărul $N = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}_{\,(b)}$ în baza 10, efectuăm calculele din relația (*).

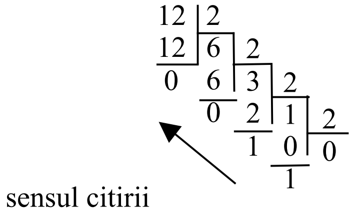
Exemple. $1765_{(8)} = 1 \cdot 8^4 + 7 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8 + 5 = 1013_{(10)} = 1013$

$1111001_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 121$

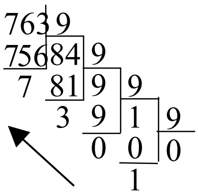
Pentru a trece numărul *N* din baza 10 în baza *b* se aplică următorul algoritm: se împarte *N* la *b*, iar câtul obținut se împarte la *b* ş.a.m.d. până când se obține câtul 0. Resturile scrise în ordine inversă decât efectuarea operațiilor, reprezintă cifrele numărului căutat în baza *b*.

Această succesiune de împărțiri poartă numele de algoritmul sistemelor de numerație.

Exemple. 1) Trecem numărul 12 din baza 10 în baza 2.
12=2·6+0, 6=2·3+0, 3=2·1+1, 1=2·0+1. Deci 12=$1100_{(2)}$.
Calculele anterioare se pot aranja şi astfel:



2) Trecem numărul 763 din baza 10 în baza 9.
763=9·84+7, 84=9·9+3, 9=9·1+0, 1=9·0+1. Deci 763=$1037_{(9)}$



Pentru a trece un număr *N* din baza *b* în baza *c*, trecem numărul din baza *b* în baza 10, iar numărul astfel obținut îl trecem în baza *c* folosind algoritmul sistemelor de numerație.

Exemple. 1) Trecem numărul $124_{(5)}$ în baza 7.

Trecând $124_{(5)}$ în baza 10 obținem $124_{(5)} = 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 4 = 39$.

Îl trecem pe 39 din baza 10 în baza 7:

39=7·5+4, 5=7·0+5. Deci $124_{(5)}=54_{(7)}$.

2) Trecem numărul $214_{(6)}$ în baza 8.

Trecând mai întâi în baza 10, obținem $214_{(6)} = 2\cdot 6^2 + 1\cdot 6 + 4 = 82$. Îl trecem pe 82 din baza 10 în baza 8.

82=8·10+2, 10=8·1+2, 1=8·0+1. Deci $214_{(6)}=122_{(8)}$.

Remarcă. Pentru rezolvarea problemei de trecere dintr-o bază *b* în alta *b*' putem proceda şi astfel: scriem numărul sub forma sistematică în baza *b* şi trecerea tuturor cifrelor numărului inclusiv a bazei în noul sistem de numerație cu baza *b*', după care se efectuează calculele cerute în baza *b*'.

Exemplu. Trecem numărul $246_{(8)}$ în baza 5.

$$246_{(8)} = 2\cdot 8^2 + 4\cdot 8 + 6 = 2_{(5)}\cdot 13_{(5)}^2 + 4_{(5)}\cdot 13_{(5)} + 11_{(5)} =$$

$$= 2_{(5)}\cdot 224_{(5)} + 112_{(5)} + 11_{(5)} = 1003_{(5)} + 123_{(5)} = 1131_{(5)}$$

Operații cu numere scrise în diverse baze

Regulile de calcul pentru operațiile cunoscute se aplică şi numerelor scrise într-o altă bază *b*, dar trebuie alcătuite în prealabil table de adunare şi de înmulțire a numerelor în sistemul de numerație respecți

De exemplu, tablele de adunare şi de înmulțire în sistemul binar (cu baza 2) şi în sistemul ternar (cu baza 3) sunt următoarele:

+	0	1
0	0	1
1	0	10

•	0	1
0	0	0
1	0	1

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

•	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Probleme rezolvate

R1.6.1. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției:

$1212_{(3)}+1313_{(4)}+1414_{(5)}+1515_{(6)}+1616_{(7)}=2000003_{(3)}$

Soluție. Trecem toate numerele în baza 10:

$1212_{(3)} = 1\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2 + 1\cdot 3 + 2 = 50$, $1313_{(4)} = 1\cdot 4^3 + 3\cdot 4^2 + 1\cdot 4 + 3 = 119$,

$1414_{(5)} = 1\cdot 5^3 + 4\cdot 5^2 + 1\cdot 5 + 4 = 234$, $1515_{(6)} = 1\cdot 6^3 + 5\cdot 6^2 + 1\cdot 6 + 5 = 407$,

$1616_{(7)} = 1\cdot 7^3 + 6\cdot 7^2 + 1\cdot 7 + 6 = 650$ şi $2000003_{(3)} = 2\cdot 3^6 + 2 = 1460$.

Membrul stâng devine 50+119+234+407+650=1460.

Propoziția este adevărată.

R1.6.2. Scrieți numărul 2003 ca sumă de puteri ale lui 2 cu exponenți diferiți.

Soluție. Trecem 2003 din baza 10 în baza 2.

2003=2·1001+1, 1001=2·500+1, 500=2·250+0, 250=2·125+0

125=2·62+1, 62=2·31+0, 31=2·15+1, 15=2·7+1, 7=2·3+1, 3=2·1+1, 1=2·0+1. Deci 2003=11111010011$_{(2)}$ şi se poate scrie 2003=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^4+2+2^0.

R1.6.3. Aflaţi *x, y, z* numere naturale care verifică egalitatea:

$$2^{3x+2}+2^{2y+1}+2^z=416\,.$$

Soluţie. Trecem 416 din baza 10 în baza 2. Se obţine: 416=110100000$_{(2)}$. Egalitatea devine: $2^{3x+2}+2^{2y+1}+2^z=2^8+2^7+2^5$. Sunt posibile următoarele cazuri:

$$3x+2=8,\,2y+1=7,\,z=5\Rightarrow x=2,\,y=3,\,z=5$$

$$3x+2=8,\,2y+1=5,\,z=7\Rightarrow x=2,\,y=2,\,z=7$$

$$3x+2=5,\,2y+1=7,\,z=8\Rightarrow x=1,\,y=3,\,z=8$$

R1.6.4. Comparaţi numerele:

$$n_1=1981^{1980}+1981^{1983} \text{ şi } n_2=1981^{1981}+1981^{1982}$$

Soluţie. Aceste numere se pot compara foarte uşor dacă trecem numerele în baza 1981; ţinând cont că 1981=10$_{(1981)}$ obţinem

$$n_1=1\underbrace{00...0}_{1980}{}_{(1981)}+1\underbrace{00...0}_{1983}{}_{(1981)}=1001\underbrace{00...0}_{1980}{}_{(1981)}$$

$$n_2=1\underbrace{00...0}_{1981}{}_{(1981)}+1\underbrace{00...0}_{1982}{}_{(1981)}=11\underbrace{00...0}_{1981}{}_{(1981)}\,.$$

Numărul n_1 are 1984 cifre în baza 1981, iar numărul n_2 are 1983 cifre în baza 1981, deci $n_1>n_2$.

Remarcă. Este foarte util de reţinut această metodă de comparare a sumei de puteri cu aceeaşi bază, trecând numerele într-o bază egală cu baza puterii.

R1.6.5. a) Se dă numărul $E_1=2^7-2^6-2$. Să se scrie acest număr ca o sumă de puteri naturale consecutive ale lui 2.

b) Se cere acelaşi lucru pentru $E_2=2^n-2^{n-1}-2$, unde $n\in\mathbf{N}$ şi $n\geq 3$.

Soluţie. a) Folosind scrierea binară şi efectuând calculele se obţine:

$$E_1=10000000_{(2)}-1000000_{(2)}-10_{(2)}=1000000_{(2)}-10_{(2)}=111110_{(2)}=$$

$$=2^5+2^4+2^3+2^2+2 \text{ (s-a ţinut cont că } 10_{(2)}-1_{(2)}=1_{(2)}\text{).}$$

b) Procedând la fel pentru E_2 obţinem:

$$E_2=1\underbrace{00...0}_{n}{}_{(2)}-1\underbrace{00...0}_{n-1}{}_{(2)}-10_{(2)}=1\underbrace{00...0}_{n-1}{}_{(2)}-10_{(2)}=\underbrace{11...1}_{n-2}0_{(2)}=$$

$$=2^{n-2}+2^{n-3}+...+2^2+2\,.$$

R1.6.6. Într-un sistem de numeraţie de bază *x*, avem egalitatea

$$107_{(x)}+45_{(x)}=154_{(x)}$$

Să se afle baza sistemului şi să se verifice.

Soluţie. Scriem numerele sub formă sistematică în baza *x* şi punem condiţia ca *x* să fie natural şi mai mare ca cea mai mare dintre cifrele numerelor: $1\cdot x^2+0\cdot x+7+4\cdot x+5=1\cdot x^2+5\cdot x+4$, $x\in\mathbf{N}$, $x>7$. Se obţine $x^2+4x+12=x^2+5x+4$ sau $4x+12=5x+4$, ce conduce la $x=8$.

Verificare: $107_{(8)} + 45_{(8)} = 1 \cdot 8^2 + 7 + 4 \cdot 8 + 5 = 108$, iar $154_{(8)} = 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 4 = 108$.

R1.6.7. În ce bază are loc inegalitatea 11+22+33>223?

Soluție. Fie x baza sistemului de numerație căutată. Se impune condiția x număr natural, $x > 3$:

$$11_{(x)} + 22_{(x)} + 33_{(x)} > 123_{(x)},\ x \in \mathbf{N},\ x > 3.$$

Scriem numerele sub formă sistematică și avem:
$x + 1 + 2x + 2 + 3x + 3 > 1 \cdot x^2 + 2x + 3$ sau $4x + 3 > x^2$.

Inegalitatea este verificată pentru $x = 4$, iar pentru $x > 5$ avem $x^2 > 4x + 3$. Soluția este 4.

R1.6.8. Determinați *x* și *y*, dacă

$$11_{(x)} + 22_{(y)} = 21_{(8)} \text{ și } 33_{(x)} + 44_{(y)} = 43_{(9)}.$$

Soluție. Condițiile ce se impun sunt *x, y* naturale, $x > 3, y > 4$. Scriem numerele sub formă sistematică și avem: $x + 1 + 2y + 2 = 2 \cdot 8 + 1$ și $3x + 3 + 4y + 4 = 4 \cdot 9 + 3$; efectuând calculele se obține $x + 2y = 14$ și $3x + 4y = 32$. Înmulțim prima egalitate cu 3 și apoi scădem cele două egalități membru cu membru. Se obține $2y = 10$, deci $y = 5$ și $x = 4$.

R1.6.9. Un comerciant vinde zahăr, pe care îl primește în saci de 80 kg. Pentru a putea cântări orice greutate între 1 și 80 kg (număr natural) se folosește de un cântar cu greutăți (nu balanță!).

a) Care este numărul minim de greutăți de care are nevoie?

b) Câte greutăți trebuie să aibă, dacă pe fiecare o are în două exemplare?

Soluție. a) Sunt necesare cel puțin 7 greutăți, care pot fi de câte: 1,2,4,8,16,32 și 64 kg (sau ultima orice număr *k*, $17 \le k \le 64$). Pentru a cântări orice greutate de la 1 la 63 kg sunt necesare minim 6 greutăți, ele fiind de 1,2,4,8,16 și 32 kg, deoarece orice număr între 1 și 63 se scrie în baza 2 cu cel mult 6 cifre:
$63=111111_{(2)}$.

A pune sau nu o anumită greutate pe cântar înseamnă a lua cifra 1 respectiv 0 în numărul de kilograme scris în baza 2 pe poziția corespunzătoare greutății respective.

Pentru a cântări greutăți mai mari este necesară cel puțin o greutate, care poate fi de 80-63=17 kg sau 2^6=64 kg și atunci putem cântări cantități până la 127 kg.

b) Sunt necesare cel puțin 8 greutăți, câte două de fiecare din: 1,3,9,27 kg. O anumită greutate într-o cântărire poate:

- lipsi de pe cântar (0)
- apar un exemplar pe cântar (1)
- apar două exemplare pe cântar (2),

ce ne conduce la a raționa cu numere în baza 3.

Avem $80=2(1+3+9+27)=2222_{(3)}$ și pentru a scrie orice număr în baza 3 între 1 și 80 avem nevoie de 4 cifre (8 greutăți, căci fiecare e luată în dublu exemplar).

1.7. Criptaritm

Problemele ce apar în această temă se referă la determinarea cifrelor unui număr natural, scris în baza 10, folosind operațiile definite în mulțimea numerelor naturale. Cifrele necunoscute sunt reprezentate prin litere. Literele de acelaşi fel semnifică cifre egale, dar litere diferite nu semnifică neapărat cifre diferite.

Model. 1) Să se determine numerele naturale de 2 cifre $\overline{ab}$ cu proprietatea $\overline{ab}+\overline{ba}=154$.

Soluție. Scriem numerele în baza 10; avem $10a+b+10b+a=154$ sau $11(a+b)=154$ sau $a+b=14$. Această egalitate este verificată de: $a=5, b=9; a=6, b=8; a=7, b=7; a=8, b=6$ şi $a=9, b=5$.

Soluțiile problemei sunt: 59, 68, 77, 86, 95.

2) Să se reconstituie adunarea:

$$BALADA+LADA+ADA+DA+A=257605$$

Soluție. Literele *B, A, L, D* reprezintă cifre. Adunarea se poate scrie:

$$\begin{array}{cccccc}
B & A & L & A & D & A \; + \\
 & & L & A & D & A \\
 & & & A & D & A \\
 & & & & D & A \\
 & & & & & A \\
\hline
2 & 5 & 7 & 6 & 0 & 5
\end{array}$$

$A+A+A+A+A\in\{5,15,25,35,45\}$

$A=1\Rightarrow 4D\in\{0,10,20,30\}$, de unde avem $D=0$ conduce la $3A=6, A=2$ nu e posibil

$D=5\Rightarrow 3A+2=6$ imposibil

$A=3\Rightarrow 1+4D\in\{0,10,20,30\}$ imposibil pentru că $1+4D$ este impar

$A=5\Rightarrow 2+4D\in\{0,10,20,30\}$

$2+4D=10\Rightarrow D=2$

$A=5, D=2\Rightarrow 3\cdot 5+1=16, 1+2L=7\Rightarrow L=3, B=2$

$1+2L\in\{17,27\}$ nu este posibil pentru că $A=5$.

$A=7\Rightarrow 3+4D\in\{0,10,20,30\}$ imposibil

$A=9\Rightarrow 4+4D\in\{0,10,20,30,40\}\Rightarrow D\in\{4,9\}$

$D=4\Rightarrow 4+4D=20\Rightarrow 2+3A=2+3\cdot 9=29$ imposibil

$D=9\Rightarrow 4+4D=40\Rightarrow 4+3A=4+3\cdot 9=31$ imposibil

Rezultă $B=2, A=5, L=3, D=2$.

Verificare: 253525+3525+525+25+5=257605

Probleme rezolvate

R1.7.1. Aflați numerele de 4 cifre $\overline{abcd}$, care verifică relația:

$$\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 3102$$

Soluție. Se scrie sub formă sistematică în baza 10 şi se obține: $1000a + 200b + 30c + 4d = 3102$ sau $2(500a + 100b + 15c + 2d) = 3102$, de unde $500a + 100b + 15c + 2d = 1551$. Suma din membrul stâng este 1551, rezultă că *a* poate lua valorile 1, 2 sau 3. Analizăm pe rând toate situațiile ce pot apărea:

Dacă $a = 1$ se obține $100b + 15c + 2d = 1051$. Datorită faptului că $15c + 2d \le 15\cdot 9 + 2\cdot 8$, adică $15c + 2d \le 153$, rezultă că $100b \ge 1051 - 153$, $100b \ge 898$, deci *b* ia valoarea 9. Pentru $b = 9$, se obține mai departe $15c + 2d = 151$. Ştim că $2d \le 18$, deci $15c \ge 151 - 18 = 123$, rezultă că $c = 9$. Înlocuind pe *c* cu 9 se obține $2d = 151 - 135$, $2d = 16$, adică $d = 8$. Rezultă $\overline{abcd} = 1998$.

Dacă $a = 2$, se obține $100b + 15c + 2d = 551$. Judecând asemănător, $15c + 2d \le 153$, deci $100b \ge 398$, deci *b* poate fi 4 sau 5.

Pentru $b = 4$, avem $15c + 2d = 151$, ce conduce la $c = 9$ şi $d = 8$, în mod asemănător. Rezultă $\overline{abcd} = 2498$.

Pentru $b = 5$, avem $15c + 2d = 51$, dar $2d \le 18$, rezultă că $15c \ge 51 - 18$, $15c \ge 23$ şi $15c$ trebuie să fie impar (suma dintre $15c$ şi număr par $2d$ este un număr impar). Deducem că $c = 3$. Înlocuim şi avem $45 + 2d = 51$, deci $2d = 6$, $d = 3$. Rezultă $\overline{abcd} = 2533$.

Pentru $c = 5$ vom obține $15c > 51$, nu conduce la soluție.

Problema are 3 soluții: 1988, 2498, 2533.

Verificare: 1998+998+98+8=3102
2498+498+98+8=3102
2533+533+33+3=3102

R1.7.2. Determinați cifra *x*, ştiind că numărul $\overline{x9}\cdot\overline{x1} + 16$, scris în baza 10, este pătrat perfect.

Soluție. Numărul dat se poate scrie $\overline{x9}\cdot(10x + 1) + 16$. Efectuând înmulțirile avem

$$\overline{x9}\cdot 10x + \overline{x9} + 16 = (10x + 9)\cdot 10x + 10x + 9 + 16 = 100x^2 + 90x + 10x + 25 =$$

$$= 100x^2 + 100x + 25 = 25(4x^2 + 4x + 1) = 25(4x^2 + 2x + 2x + 1) =$$

$$= 25[2x(2x + 1) + (2x + 1)] = 25\cdot(2x + 1)^2 = [5(2x + 1)]^2 = (10x + 5)^2 = \overline{x5}^2.$$

Numărul dat este pătrat perfect oricare ar fi cifra *x* diferită de 0. Soluția problemei este $x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

R1.7.3. Determinați numărul $\overline{xy}$, ştiind că $3\cdot\overline{xy} + \overline{yx} = 114$.

Soluție. Se scriu numerele în baza 10; avem

$$3\cdot(10x+y)+10y+x=114 \text{ sau } 31x+13y=114.$$

Pentru că suma din membrul stâng are valoarea 114, rezultă că $31x\le 114$, deci x poate fi 1, 2 sau 3.

Pentru $x=1$ se obține $13y=83$ imposibil.

Pentru $x=2$ se obține $13y=52$, adică $y=4$ şi $\overline{xy}=24$.

Pentru $x=3$ se obține $13y=21$ imposibil.

Soluția problemei: 24.

Verificare: $3\cdot 24+42=72+42=114$.

R1.7.4. Suma dintre numărul de 3 cifre $\overline{abc}$ şi răsturnatul său este 645. Care sunt numerele care îndeplinesc această condiție şi care este suma lor? $(a\ne 0, c\ne 0)$

Soluție. Numărul $\overline{abc}$ verifică egalitatea $\overline{abc}+\overline{cba}=645$ ($a\ne 0$, $c\ne 0$). Avem $100a+10b+c+100c+10b+a=645$ sau
$101(a+c)+20b=645$. Se observă că $101(a+c)=645-20b$ sau
$101(a+c)=5(129-4b)$, de unde rezultă că $101(a+c)$ se divide cu 5, deci $a+c$ se divide cu 5, $a+c\in\{5,10,15\}$ (fiind suma a două cifre). Dacă $a+c=5$, avem $20b=140$, deci $b=7$. Atunci $a=1$, $b=7$, $c=4$ sau $a=2$, $b=7$, $c=3$ sau $a=3$, $b=7$, $c=2$ sau $a=4$, $b=7$, $c=1$;
$\overline{abc}\in\{174,273,372,471\}$. Suma acestor numere este (174+471)+(273+372), adică 2·645=1290.

R1.7.5. Determinați numărul de 3 cifre $\overline{abc}$ şi numărul de 2 cifre $\overline{xy}$, pentru care $\overline{abc}+\overline{bc}+c=2^{\overline{xy}}+57$.

Soluție. Se ştie că $2^{10}=1024$, iar $2^{11}=2048$; suma $\overline{abc}+\overline{bc}+c$ ia cea mai mare valoare 999+99+9=1107, deci nu poate fi mai mare sau egală cu 2048. Avem $\overline{xy}=10$. Egalitatea devine $\overline{abc}+\overline{bc}+c=1081$ sau

$$\begin{array}{r} \overline{abc} \quad + \\ \overline{bc} \\ c \\ \hline 1981 \end{array}$$

Adunăm unitățile $3c\in\{1,11,21\}$. Singura posibilitate este $c=7$. rezultă $2+2b\in\{8,18\}$, adică $b=3$ sau $b=8$. Dacă $b=3$, atunci a ar trebui să fie 10, ceea ce este imposibil, a fiind cifră. Deci, $b=8$ şi $a+1=10$, $a=9$. Numărul $\overline{abc}=987$.

Verificare: 987+87+7=1081.

R1.7.6. Determinați cifrele nenule *x, y, z* ştiind că

$$\overline{xx}\cdot\overline{yy}=\overline{xzzx}$$

Soluție. Numerele $\overline{xx}$ şi $\overline{yy}$ se mai pot scrie $11x$, respectiv $11y$, iar $\overline{xzzx} = 1000x + 100z + 10z + x = 1001x + 110z$. Egalitatea din enunț devine $11x \cdot 11y = 1001x + 110z$. Avem $11^2 \cdot x \cdot y = 11 \cdot (91x + 10z)$ sau $11xy = 91x + 10z$. Vom avea mai departe $11xy - 91x = 10z$, deci $x(11y - 91) = 10z$. Pentru a fi posibilă diferența $11y - 91$, când y este cifră, rezultă $y = 9$. Prin înlocuire se ajunge la $x \cdot 8 = 10 \cdot z$, verificată numai de cifrele $x = 5$ şi $z = 4$. Soluția este $x = 5, y = 9, z = 4$.

Verificare: 55·99=5445.

R1.7.7. Determinați numerele de două cifre $\overline{ab}$, cu proprietatea

$$\overline{ab}^2 = \overline{cde} \text{ şi } \overline{ba}^2 = \overline{edc}.$$

Soluție. Numerele $\overline{cde}$ şi $\overline{edc}$ sunt pătrate perfecte. Ultima cifră a unui pătrat perfect este 0,1,4,5,6,9, dar $c \neq 0$, $e \neq 0 \Rightarrow e, c \in \{1,4,5,6,9\}$.

Dacă $c = 1$, avem $\overline{ab}^2 = \overline{1de}$ şi $\overline{ba}^2 = \overline{ed1}$, de unde a poate fi 1 sau 9.

Pentru $a = 9$, $\overline{9b}^2$ nu este de 3 cifre. Deci $a = 1$. Avem: $\overline{1b}^2 = \overline{1de}$ şi $\overline{b1}^2 = \overline{ed1}$. Numerele ce verifică cele două egalități sunt $\overline{ab} \in \{11,12,13\}$.

Dacă $c = 4$, avem $\overline{ab}^2 = \overline{4de}$ şi $\overline{ba}^2 = \overline{ed4}$, de unde a poate fi 2 sau 8, dar cum $\overline{8b}^2$ nu este de 2 cifre, rezultă că $a = 2$. Avem $\overline{2b}^2 = \overline{4de}$ şi $\overline{b2}^2 = \overline{ed4}$. Numerele ce verifică cele două egalități sunt $\overline{ab} \in \{21,22\}$.

Dacă $c = 5$, avem $\overline{ab}^2 = \overline{5de}$ şi $\overline{ba}^2 = \overline{ed5}$, de unde a ar putea fi 5, dar $\overline{5b}^2$ nu este de 3 cifre.

Dacă $c = 6$, avem $\overline{ab}^2 = \overline{6de}$ şi $\overline{ba}^2 = \overline{ed6}$, care conduce la a ar fi 6, dar $\overline{6b}^2$ nu este de 3 cifre.

Dacă $c = 9$ avem $\overline{ab}^2 = \overline{9de}$ şi $\overline{ba}^2 = \overline{ed9}$, de unde a poate fi 3 sau 7, dar cum $\overline{7b}^2$ nu este de 3 cifre, rezultă $a = 3$. Avem $\overline{3b}^2 = \overline{9de}$ şi $\overline{b3}^2 = \overline{ed9}$. Numărul ce verifică relația este $\overline{ab} = 31$.

Problema are 6 soluții: $\overline{ab} \in \{11,12,13,21,22,31\}$.

1.8. Principiul lui Dirichlet (Principiul cutiei)

1.8.1. PRINCIPIUL LUI DIRICHLET (Principiul cutiei) este o metodă de rezolvare a unor probleme folosind un raționament de tipul următor:

Dacă în două "cutii" se găsesc trei obiecte (sau mai multe), atunci există o "cutie" care conține cel puțin două obiecte, sau

Fiind date n "căsuțe" și n+1 obiecte, atunci cel puțin o "căsuță" conține două obiecte.

1.8.2.Teoremă : Fie A o mulțime nevidă, iar A_1 , A_2 , … , A_n o partiție a lui A, adică : $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A$ și $A_i \cap A_j = \emptyset$, pentru orice i $\in N^*$, j $\in N^*$ și i $\neq$ j.

Dacă avem n+1 elemente din A, notate a_0 , a_1 , … , a_n, atunci există cel puțin o submulțime A_k (k $\in N^*$) a partiției care să conțină cel puțin două elemente ale mulțimii $\{a_0 , a_1 , \ldots , a_n\}$.

1.8.3. Probleme rezolvate

R1.8.3.1. Se consideră 7 numere naturale. Demonstrați că printre numerele naturale date cel puțin două dau același rest la împărțirea cu 6.

Soluție : La împărțirea cu 6 a unui număr natural se poate obține unul din resturile : 0, 1, 2, 3, 4 sau 5.

Considerăm "cutia 0" cea formată din toate numerele, din cele date, care dau restul 0 la împărțirea cu 6. Analog considerăm:

"Cutia 1" formată din toate numerele, din cele date, care dau restul 1 la împărțirea cu 6.

"Cutia 2" formată din toate numerele, din cele date, care dau restul 2 la împărțirea cu 6.

"Cutia 3" formată din toate numerele, din cele date, care dau restul 1 la împărțirea cu 6.

"Cutia 4" formată din toate numerele, din cele date, care dau restul 1 la împărțirea cu 6.

"Cutia 5" formată din toate numerele, din cele date, care dau restul 1 la împărțirea cu 6.

Avem astfel 6 cutii în care trebuie plasate 7 numere. Va exista cel puțin o cutie care conține două sau mai multe numere care dau același rest la împărțirea cu 6.

Generalizare : Fie n+1 numere. Să se arate că există cel puțin două numere, din cele date care dau același rest prin împărțirea la n.

R1.8.3.2. Într-o pădure de conifere cresc 800000 de brazi. Fiecare brad are cel mult 500 000 de ace. Să se demonstreze, că există cel puțin doi brazi cu același număr de ace.

Soluție: Presupunem contrariul, adică presupunem că nu există doi brazi din această pădure cu un număr egal de ace. Atunci cel mult un brad (un brad sau nici unul) va avea un ac. La fel, cel mult un brad va avea două ace, ş.a.m.d. , cel mult un brad va avea 499 999 ace, cel mult un brad va avea 500 000 ace. Deci, cel mult 500 000 au un număr de ace între 1 și 500 000. Cum în total sunt 800 000 brazi, și deoarece fiecare brad are cel mult 500 000 ace, rezultă că vor fi cel puţin doi brazi cu acelaşi număr de ace.

Observaţie: Se observă cu uşurinţă, că soluţia nu ţine esenţial de numerele concrete 800 000 (numărul de copaci) şi 500 000 (numărul maximal de ace).

Rezolvăm problema utilizând principiul lui Dirichlet. Avem 500 000 cutii numerotate respectiv 1,2,3,...,500 000. Plasăm (virtual) în aceste cutii 800 000 brazi în modul următor: în cutia cu indicele *s* se repartizează brazii cu *s* ace. Deoarece brazii, adică "obiecte", sunt mai multe decât cutii, rezultă că cel puţin o cutie va conţine cel puţin două obiecte, adică cel puţin doi brazi. Deoarece în una şi aceeaşi cutie sunt brazi cu număr egal de ace, deducem că există cel puţin doi brazi cu acelaşi număr de ace.

R1.8.3.3. Să se demonstreze, că printre orice şase numere întregi există două numere a căror diferenţă este divizibilă prin 5.

Soluţie : Considerăm 5 cutii etichetate cu numerele 0,1,2,3,4, care reprezintă resturile împărţirii la 5. Repartizăm în aceste cutii şase numere întregi arbitrare, în dependenţă de restul împărţirii la 5, adică în aceeaşi cutie se plasează numerele cu acelaşi rest de împărţire la 5. Cum numere ("obiecte") sunt mai multe decât cutii, conform principiului lui Dirichlet, există o cutie ce conţine mai mult decât un obiect. Deci, există (cel puţin) două numere plasate în aceeaşi cutie. Prin urmare, există două numere cu acelaşi rest la împărţirea prin 5. Atunci, diferenţa lor este divizibilă prin 5.

R1.8.3.4. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n \geq 1$, există un număr natural format din cifrele 0 şi 5, divizibil prin *n*.

Soluţie : Fie numerele naturale

$$a_1 = 50,\ a_2 = 5050,\ \ldots,\ a_n = \underbrace{5050\ldots50}_{de\ n\ ori}$$

şi repartizăm aceste "obiecte" în "cutii" numerotate cu numerele 0,1,...,*n*-1 (care reprezintă resturile împărţirii la *n*). În cutia *s* plasăm numărul a_k, care dă restul împărţirii la *k* numărul *s*.

Dacă în cutia cu indicele 0 este un "obiect" (adică un număr), atunci problema este rezolvată. În caz contrar *n* "obiecte" sunt plasate în *n*-1 "cutii". În baza principiului lui Dirichlet există două "obiecte" (numere) plasate în aceeaşi cutie. Deci, există două numere care dau acelaşi rest la împărţirea prin *n*. Diferenţa lor va fi divizibilă prin *n* şi se observă că diferenţa numerelor formate din cifrele 0 şi 5 la fel va fi un număr format din cifrele 0 şi 5.

R1.8.3.5. Într-o sală sunt *n* persoane ($n \geq 2$). Să se demonstreze că printre ei se vor găsi doi oameni cu acelaşi număr de cunoscuţi (se presupune că dacă persoana *A* este cunoscut al lui *B*, atunci şi *B* este cunoscut al lui *A*; nimeni nu este considerat ca fiind cunoscut al lui însuşi).

Soluţie : Desemnăm prin *m* numărul persoanelor ce au cel puţin o cunoştinţă în sală (acestea vor fi "obiectele"). Fiecare dintre aceste *m* persoane poate avea 1,2,...,*m*-1 cunoscuţi ("cutiile" vor fi numărul de cunoştinţe).

Conform principiului lui Dirichlet există două persoane cu acelaşi număr de cunoscuți.

La rezolvarea unor probleme este util de aplicat principiul lui Dirichlet generalizat.

Dacă plasăm pn+1 obiecte în n cutii, atunci cel puțin o cutie va conține cel puțin "p+1" obiecte.

R1.8.3.6. Într-o clasă sunt 40 de elevi. Există oare o lună a anului, în care cel puțin 4 elevi îşi sărbătoresc ziua de naştere ?

Soluție : "Cutiile" sunt lunile anului iar "obiectele" sunt elevii. Repartizăm "obiectele" în "cutii" în dependență de luna de naştere. Aşa cum luni, deci cutii, sunt 12, iar elevi, adică obiecte $40 = 12 \cdot 3+4$, conform principiului lui Dirichlet există o cutie (o lună) cu cel puțin $3+1=4$ obiecte.