COLEGIUL NAȚIONAL "LIVIU REBREANU" BISTRIȚA
100 de ani de la înființare

100
2010
Anul Matematicii în Școala Românească
www.anulmatematicii.ro

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN "MATEMATICA DE DRAG"
EDIȚIA a V-a (19-21 noiembrie 2010)

CLASA a V-a

1. La un campionat de fotbal, Andrei, Mihai și Vasile au marcat împreună 22 de goluri. Andrei a marcat de trei ori mai multe goluri decât Vasile, iar Mihai jumătate din numărul golurilor marcate de Andrei. Câte goluri a marcat fiecare?

2. Să se determine numerele naturale $\overline{abc}$, scrise în baza 10, astfel încât $\overline{abc} = \overline{cba} + \overline{ab} + \overline{ba} + \overline{ca} + \overline{ac} + \overline{bc} + \overline{cb}$.

3. Există 5 numere naturale a, b, c, d și e cu proprietatea că suma a oricăror patru dintre ele dă restul 1 prin împărțirea la 4 ?

Notă:

- Fiecare subiect rezolvat complet și corect primește 7 puncte.
- Orice rezolvare corectă va primi punctajul corespunzător.
- Timpul de lucru este de $2\frac{1}{2}$ h.

COLEGIUL NAȚIONAL "LIVIU REBREANU" BISTRIȚA
100 de ani de la înființare

100
2010
Anul Matematicii în
Școala Românească
www.anulmatematicii.ro

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN "MATEMATICA DE DRAG"
EDIȚIA a V-a (19-21 noiembrie 2010)

CLASA a VI-a

1. Determinați toate numerele naturale nenule care împărțite la 17 dau câtul egal cu restul și împărțite la 23 dau , de asemenea , câtul egal cu restul.

2. Determinați m , n numere naturale astfel încât $2^m - 2^n = 120$.

3. Arătați că numărul $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2009 \cdot 2010 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2009} + \frac{1}{2010}\right)$

este natural și se divide cu 2011.

Notă:

- Fiecare subiect rezolvat complet și corect primește 7 puncte.
- Orice rezolvare corectă va primi punctajul corespunzător.
- Timpul de lucru este de $2\frac{1}{2}$ h.

COLEGIUL NAȚIONAL "LIVIU REBREANU" BISTRIȚA
100 de ani de la înființare

100
2010
Anul Matematicii în
Școala Românească
www.anulmatematicii.ro

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN "MATEMATICA DE DRAG"
EDIȚIA a V-a (19-21 noiembrie 2010)

CLASA a VII-a

1. În triunghiul ABC, M este mijlocul înălțimii AD ($D \in (BC)$), iar $E \in (AC)$ astfel încât $EC = 2AE$. Arătați că punctele B, M, E sunt coliniare dacă și numai dacă $[AB] \equiv [AC]$.

2. Să se determine $a, b \in \mathrm{N}$ știind că 1997 împărțit la a dă restul $2b-a$ și împărțit la b dă restul $2a-10$.

3. Dacă x, y, z, t sunt numere reale, atunci

$$(-x+y+z+t)^2+(x-y+z+t)^2+(x+y-z+t)^2+(x+y+z-t)^2+\frac{1}{4} \geq x+y+z+t$$

Precizați cazul de egalitate.

Notă:

- Fiecare subiect rezolvat complet și corect primește 7 puncte.
- Orice rezolvare corectă va primi punctajul corespunzător.
- Timpul de lucru este de $2\frac{1}{2}$ h.

COLEGIUL NAȚIONAL "LIVIU REBREANU" BISTRIȚA
100 de ani de la înființare

100
2010
Anul Matematicii în Școala Românească
www.anulmatematicii.ro

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN "MATEMATICA DE DRAG"
EDIȚIA a V-a (19-21 noiembrie 2010)

CLASA a VIII-a

1. Fie patrulaterul inscriptibil $ABCD$. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, $E \in (OC)$ și $F \in (BD)$, să se demonstreze că $EF \parallel AB$ dacă și numai dacă $\angle ADE \equiv \angle BCF$.

2. Demonstrați că pentru orice n număr natural are loc inegalitatea

$$\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots+\sqrt{n+\sqrt{n}}}} \angle \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}.$$

3. Fie a și n două numere naturale nenule. Arătați că numărul $x_n(a) = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{12n-1}$ se divide prin $(a+1)(a^2+1)(a^8+a^4+1)$.

Notă:

- Fiecare subiect rezolvat complet și corect primește 7 puncte.
- Orice rezolvare corectă va primi punctajul corespunzător.
- Timpul de lucru este de $2\frac{1}{2}$ h.

COLEGIUL NAȚIONAL "LIVIU REBREANU" BISTRIȚA
100 de ani de la înființare

100
2010
Anul Matematicii în
Școala Românească
www.anulmatematicii.ro

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN "MATEMATICA DE DRAG"
EDIȚIA a V-a (19-21 noiembrie 2010)

CLASA a IX-a

1. Fie $a \in \Re^*$ cu $|a| \neq 1$. Determinați funcția $f : \Re \to \Re$ care are proprietatea $f(1-x) + af(1+x) = (a+1)x^2 + 2(a-1)x + 2(a+1)$, pentru orice x, număr real.

2. Dacă $x, y, z \in (0, \infty)$ să se arate că :

$$(x+2y)^4 + (y+2z)^4 + (z+2x)^4 \geq 3(x+y+z)^4 .$$

3. Fie $ABCD$ un patrulater și punctele M, N, P, Q astfel încât: $\overrightarrow{MB} = -\alpha\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{NB} = -\alpha\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{PC} = -\alpha\overrightarrow{PD}$ și $\overrightarrow{QA} = -\alpha\overrightarrow{QD}$, $\alpha \in \Re, \alpha > 0$. Să se arate că

$$\left|\overrightarrow{MP}\right| + \left|\overrightarrow{QN}\right| \leq \frac{1}{\alpha+1}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| + \alpha\left|\overrightarrow{CD}\right| + \alpha\left|\overrightarrow{AD}\right|\right).$$

Notă:

- Fiecare subiect rezolvat complet și corect primește 7 puncte.
- Orice rezolvare corectă va primi punctajul corespunzător.
- Timpul de lucru este de $2\frac{1}{2}$ h.

COLEGIUL NAȚIONAL "LIVIU REBREANU" BISTRIȚA
100 de ani de la înființare

100
2010
Anul Matematicii în
Şcoala Românească
www.anulmatematicii.ro

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN "MATEMATICA DE DRAG"
EDIȚIA a V-a (19-21 noiembrie 2010)

CLASA a X-a

1. Fie x, y>0 și $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:
$$1+\frac{(x+y)^1}{x+y}+\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}+\ldots+\frac{(x+y)^n}{x^n+y^n} \le 2^n .$$

2. Să se determine mulțimea perechilor $(a, b) \in \Re \times \Re$ cu proprietatea
$$\max_{x\in[-1,1]}(ax^2+bx-1)=1 .$$

3. Arătați că nu există p prim așa încât $3^p+19(p-1)$ să fie pătrat perfect.

Notă:

- Fiecare subiect rezolvat complet și corect primește 7 puncte.
- Orice rezolvare corectă va primi punctajul corespunzător.
- Timpul de lucru este de $2\frac{1}{2}$ h.

COLEGIUL NAȚIONAL "LIVIU REBREANU" BISTRIȚA
100 de ani de la înființare

100
2010
Anul Matematicii în
Şcoala Românească
www.anulmatematicii.ro

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN "MATEMATICA DE DRAG"
EDIȚIA a V-a (19-21 noiembrie 2010)

CLASA a XI-a

1. Fie a , b , c numere complexe. Considerăm $S_n = a^n + b^n + c^n$ şi

$$A_n = \begin{pmatrix} S_{n+2} & S_{n+1} & S_n \\ S_{n+3} & S_{n+2} & S_{n+1} \\ S_{n+4} & S_{n+3} & S_{n+2} \end{pmatrix}$$, unde $n \in \mathrm{N}^*$. Să se arate că:

$$\det(A_n) = -(abc)^n (b-a)^2 (c-a)^2 (c-b)^2 .$$

2. Demonstrați că în orice triunghi ascuțitunghic are loc inegalitatea:
$$(a+b)\sqrt{\sin 2C} + (b+c)\sqrt{\sin 2A} + (c+a)\sqrt{\sin 2B} \le 6\sqrt{2S} .$$

3. Fie $a \in \Re$, $a > 1$ dat. Considerăm șirul $x_0 \in \Re$, $x_{n+1} = x_n + a^{-x_n}$, $n \in \mathrm{N}$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\ln x_n}$.

Notă:

- Fiecare subiect rezolvat complet și corect primește 7 puncte.
- Orice rezolvare corectă va primi punctajul corespunzător.
- Timpul de lucru este de $2\frac{1}{2}$ h.

COLEGIUL NAȚIONAL "LIVIU REBREANU" BISTRIȚA
100 de ani de la înființare

100
2010
Anul Matematicii în Școala Românească
www.anulmatematicii.ro

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN "MATEMATICA DE DRAG"
EDIȚIA a V-a (19-21 noiembrie 2010)

CLASA a XII-a

1. Fie A o matrice de ordinul 2 cu elemente reale și λ_1, λ_2 rădăcinile polinomului $P = \det(A - \lambda I_2)$. Să se arate că :
$\left(A - \lambda_1 I_2\right)^{2n} + (A - \lambda_2 I_2)^{2n} = (\lambda_1 - \lambda_2)^{2n} I_2$, $n \in \mathrm{N}^*$, $n \geq 1$.

2. Aflați primitivele funcției $f(x) = \dfrac{(1+e^x)^4}{1+e^{4x}}$, $x \in \Re$.

3. Să se arate că $\dfrac{\sqrt[n+2]{(n+2)!} \cdot \sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} \angle \sqrt[(n+1)(n+2)]{\dfrac{e}{3}}$, $n = 2, 3, \ldots.$

Notă:

- Fiecare subiect rezolvat complet și corect primește 7 puncte.
- Orice rezolvare corectă va primi punctajul corespunzător.
- Timpul de lucru este de $2\frac{1}{2}$ h.