

**Evaluarea la disciplina *Matematică*  
în cadrul examenului național de bacalaureat 2011  
Programa M1**

**Introducere**

Examenul național de bacalaureat este modalitatea esențială de evaluare externă sumativă a competențelor, a nivelului de cultură generală și de specializare atins de absolvenții de liceu.

Conform **Metodologiei de organizare și desfășurare a examenului de bacalaureat – 2011**, aprobată prin ordinul MECTS nr. 4799/31.08.2010, elevii susțin, în cadrul probei E. c), în conformitate cu filiera, profilul și specializarea urmate, proba de matematică, corespunzătoare programelor M1, M2 sau M4.

În consecință, susțin proba scrisă la disciplina *Matematică* elevii care au absolvit liceul în cadrul profilului real din filiera teoretică, în cadrul tuturor profilurilor din filiera tehnologică și în cadrul profilului pedagogic, specializarea învățător-educatoare și a profilului militar, specializarea matematică-informatică, din filiera vocațională. *Matematica* are statut de disciplină obligatorie pentru aceștia.

**Structura probei scrise la disciplina *Matematică***

Testele elaborate pentru proba scrisă la matematică contribuie la îndeplinirea funcțiilor evaluării urmărite prin examenul de bacalaureat. Prin aceste teste se realizează o evaluare sumativă la finalul învățământului preuniversitar. Fiecare test asigură o cuprindere echilibrată a materiei studiate, are un grad de complexitate corespunzător cu programa de bacalaureat al cărei conținut este inclus în programa școlară și poate fi rezolvat în timpul stabilit de 3 ore.

Testul pentru proba scrisă la disciplina *Matematică* este format din trei subiecte. Fiecare subiect conține fie itemi subiectivi de tip rezolvare de probleme, fie itemi semiobiectivi de tip întrebări structurate.

## **Competențe de evaluat la disciplina Matematică**

Proba scrisă la disciplina *Matematică*, susținută în cadrul examenului de bacalaureat, evaluează competențe dezvoltate pe parcursul învățământului liceal, în conformitate cu programele școlare pentru clasele a IX-a - a XII-a, în vigoare pentru absolvenții promoției 2011.

Competențele de evaluat, asociate conținuturilor programei de bacalaureat, în cadrul probei scrise la matematică, sunt:

### **1. Identificarea unor date și relații matematice și corelarea lor în funcție de contextul în care au fost definite**

- Utilizarea proprietăților algebrice ale numerelor, a estimărilor și aproximărilor în contexte variate
- Recunoașterea unor corespondențe care sunt șiruri, progresii, funcții
- Identificarea valorilor unei funcții folosind reprezentarea grafică
- Descrierea sintetică sau vectorială a proprietăților unor configurații geometrice
- Identificarea unor metode posibile în rezolvarea problemelor
- Interpretarea primară a datelor statistice sau probabilistice cu ajutorul calculului financiar, a graficelor și a diagramelor

### **2. Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunțuri matematice**

- Utilizarea unor metode algebrice și/ sau grafice pentru rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor de ecuații
- Completarea unor tabele de valori necesare pentru trasarea graficului
- Aplicarea unor metode diverse pentru optimizarea calculelor de distanțe, unghiuri și arii
- Identificarea tipului de formulă de numărare adecvată unei situații problemă date
- Utilizarea unor algoritmi specifici calculului financiar, statisticii sau probabilităților pentru analiza de caz
- Identificarea unor metode de calcul a integralelor, prin realizarea de legături cu regulile de derivare
- Interpretarea unor proprietăți ale șirurilor și ale altor funcții cu ajutorul reprezentărilor grafice
- Evidențierea asemănărilor și a deosebirilor dintre proprietățile unor operații definite pe mulțimi diferite și dintre calculul polinomial și cel cu numere

### **3. Utilizarea algoritmilor și a conceptelor matematice pentru caracterizarea locală sau globală a unei situații concrete**

- Alegerea formei de reprezentare a unui număr real și utilizarea de algoritmi pentru optimizarea calcului cu numere
- Transpunerea în limbaj matematic prin mijloace statistice sau probabilistice a unor probleme practice
- Operarea cu funcții reprezentate în diferite moduri și caracterizarea calitativă a acestor reprezentări
- Utilizarea unor formule combinatoriale în raționamente de tip inductiv
- Utilizarea operațiilor cu vectori pentru a descrie o problemă practică
- Aplicarea algoritmilor de calcul în situații practice

### **4. Exprimarea caracteristicilor matematice cantitative sau calitative ale unei situații concrete și a algoritmilor de prelucrare a acestora**

- Caracterizarea unor mulțimi de numere și a unor relații dintre acestea utilizând limbajul logicii matematice și teoria mulțimilor
- Exprimarea proprietăților unei funcții prin condiții algebrice sau geometrice
- Exprimarea prin reprezentări grafice a unor condiții algebrice; exprimarea prin condiții algebrice a unor reprezentări grafice
- Exprimarea analitică, sintetică sau vectorială a caracteristicilor matematice ale unei configurații geometrice
- Exprimarea cu ajutorul noțiunilor de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăți cantitative și calitative ale unei funcții
- Analizarea unor configurații geometrice pentru optimizarea algoritmilor de rezolvare
- Analizarea și interpretarea unor situații practice cu ajutorul conceptelor statistice sau probabilistice
- Utilizarea proprietăților operațiilor în calcule specifice unei structuri algebrice

### **5. Analiza și interpretarea caracteristicilor matematice ale unei situații-problemă**

- Analizarea unor contexte uzuale și matematice (de exemplu: redactarea soluției unei probleme) utilizând limbajul logicii matematice și teoria mulțimilor
- Analizarea unor situații practice și descrierea lor cu ajutorul funcțiilor
- Interpretarea unor situații-problemă cu conținut practic cu ajutorul funcțiilor și a elementelor de combinatorică
- Stabilirea unor condiții de existență și/ sau de compatibilitate a unor sisteme și identificarea unor metode adecvate de rezolvare a acestora

- Folosirea proprietăților unei funcții continue pentru calcularea integralei acesteia pe un interval

**6. Modelarea matematică a unor contexte problematice variate, prin integrarea cunoștințelor din diferite domenii**

- Transpunerea unei situații-problemă în limbaj matematic, rezolvarea problemei și interpretarea rezultatului
- Interpretarea informațiilor conținute în reprezentări grafice prin utilizarea de estimări, aproximări și strategii de optimizare
- Optimizarea calculului trigonometric prin alegerea adecvată a formulelor
- Modelarea unor configurații geometrice analitic, sintetic sau vectorial
- Optimizarea rezolvării unor probleme sau situații-problemă prin alegerea unor strategii și metode adecvate (de tip algebric, vectorial, analitic, sintetic)
- Explorarea unor proprietăți cu caracter local și/ sau global ale unor funcții utilizând continuitatea, derivabilitatea sau reprezentarea grafică

**Precizări privind evaluarea probei scrise la disciplina Matematică**

Ponderea diferitelor comportamente cognitive în evaluarea competențelor elevilor prin proba scrisă la examenul de bacalaureat 2011, disciplina *Matematică*, este ilustrată în tabelul de mai jos:

| Competență<br>Tip de comportament | Cunoștințe, abilități/ deprinderi, atitudini |            |          |                    |          |
|-----------------------------------|--|------------|----------|--------------------|----------|
|                                   | Cunoaștere                                   | Înțelegere | Aplicare | Analiză – Sintează | Evaluare |
| Comportamente cognitive           |  |            |          |                    |          |
| Pondere                           | 10%  | 15%        | 50%      | 15%                | 10%      |

Competențele de evaluat, înscrise în programele pentru examenul de bacalaureat 2011 la *Matematică* sunt urmărite, în cadrul probei scrise, având în vedere raportul dintre competență și comportamentele cognitive corespunzătoare, conform prezentării anterioare.

Baremul de evaluare și de notare este asociat sarcinilor concrete de lucru date elevilor și pe baza acestuia se apreciază lucrările scrise. Baremul de evaluare și de notare este elaborat cu un grad înalt de obiectivitate și aplicabilitate, astfel încât să reducă diferențele de notare dintre evaluatori. Baremul de evaluare și de notare a fost proiectat pe baza notării analitice. Aceasta implică determinarea principalelor performanțe (unități

de răspuns) pe care elevul trebuie să le evidențieze în rezolvarea fiecărui item. Notarea analitică are avantajul de a asigura rigurozitatea corectării, favorizând realizarea unei aprecieri obiective.

Baremul de evaluare și de notare, în cazul itemilor de tip rezolvare de probleme/întrebări structurate, include elemente ale răspunsului care sunt notate. În acest fel candidatul primește punctaj pentru rezolvări parțiale ale cerinței itemului. Pentru o evaluare unitară, în barem se regăsesc rezolvări complete ale itemilor. Se punctează corespunzător oricare altă metodă de rezolvare corectă a problemei.

Testul și baremul corespunzător, elaborate în vederea asigurării transparenței și informării persoanelor interesate, sunt prezentate ca modele pentru examenul de bacalaureat 2011.

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011****Proba E. c)****Probă scrisă la MATEMATICĂ****MODEL**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

**I. FELADAT****(30 pont)**

- 5p 1. Számítsd ki a  $z = 1 - i\sqrt{3}$  komplex szám modulusát!
- 5p 2. Határozd meg az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + x + 1$  függvény értékeinek halmazát!
- 5p 3. A  $(b_n)_{n \geq 1}$  mértani haladványban  $b_3 = 6$  és  $b_5 = 24$ . Számítsd ki  $b_7$  értékét!
- 5p 4. Határozd meg az  $x > 0$  valós számot, ha  $\log_a x = 2 \log_a 3 - 3 \log_a 2$ , ahol  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .
- 5p 5. Írd fel az  $A(3, 2)$  pontból a  $d: x + 2y + 5 = 0$  egyenesre húzott merőleges egyenes egyenletét!
- 5p 6. Ha  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  és  $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ , számítsd ki  $\cos x$ -et!

**II. FELADAT****(30 pont)**

1. Adott az  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  halmazban az  $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -2x & 4x^2 \\ 0 & 1 & -4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix.
- 5p a) Számítsd ki:  $(A(2) - A(0))^{2010}$ .
- 5p b) Igazold, hogy  $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$ , bármely  $x, y \in \mathbb{R}$  esetén!
- 5p c) Igazold, hogy az  $A(x)$  mátrix invertálható és számítsd ki az inverzét!
2. A  $G = (0, 1)$  halmazon értelmezzük az  $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$  asszociatív műveletet.
- 5p a) Vizsgáld meg, hogy az  $e = \frac{1}{2}$  szám semleges eleme-e a „\*” műveletnek!
- 5p b) Igazold, hogy a  $G$  halmaz minden eleme invertálható a „\*” műveletre nézve!
- 5p c) Igazold, hogy az  $f: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x) = \frac{1}{x} - 1$  függvény izomorfizmus a  $(G, *)$  és  $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$  csoportok között!

**III. FELADAT****(30 pont)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + 1$  függvény.

5p a) Számítsd ki  $f'(5)$ -öt!

5p b) Számítsd ki a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(n+1)-1}{f(n)-1} \right)^n$  határértéket!

5p c) Igazold, hogy az  $f'(x) = 0$  egyenletnek pontosan három különböző valós megoldása van!

2. Adott az  $(I_n)_{n \geq 0}$ ,  $I_n = \int_0^1 \frac{(x^2 + x + 1)^n - x}{x^2 + 1} dx$  sorozat.

5p a) Számítsd ki  $I_0$  értékét!

5p b) Vizsgáld meg, hogy igaz-e, hogy  $I_2 - I_0 \in \mathbb{Q}$ .

5p c) Igazold, hogy  $I_{4n+1} \in \mathbb{Q}$ , bármely  $n \in \mathbb{N}$  esetén!

# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011

Proba E. c)

Probă scrisă la MATEMATICĂ

MODEL

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

## BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

### SUBIECTUL I

(30 de puncte)

|    |  |                |
|----|--|----------------|
| 1. | $ 1 - i\sqrt{3}  = \sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$  | 3p<br>2p       |
| 2. | $x^2 + x + 1 - y = 0$<br>$\Delta = 4y - 3 \geq 0$<br>$\text{Im}_f = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$   | 1p<br>2p<br>2p |
| 3. | $b_1 = \frac{3}{2}$<br>$q^2 = 4$<br>$b_7 = 96$   | 1p<br>2p<br>2p |
| 4. | $\log_a x = \log_a 9 - \log_a 8$<br>$\log_a x = \log_a \frac{9}{8} \Rightarrow x = \frac{9}{8}$  | 2p<br>3p       |
| 5. | $m_d = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_{d'} = 2$ unde $d \perp d'$<br>Ecuația dreptei $d'$ este $y = 2x - 4$  | 2p<br>3p       |
| 6. | $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \frac{1}{9}$<br>$\cos x = \pm \frac{1}{3}$<br>$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{3}$ | 2p<br>1p<br>2p |

### SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

|      |   |                |
|------|---|----------------|
| 1.a) | $A(2) - A(0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 16 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$<br>$(A(2) - A(0))^3 = O_3$<br>$(A(2) - A(0))^{2010} = O_3$ | 2p<br>2p<br>1p |
| b)   | $A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 1 & -2x-2y & 4y^2+8xy+4x^2 \\ 0 & 1 & -4x-4y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  | 3p<br>2p       |

Probă scrisă la **Matematică**

Barem de evaluare și de notare



|      |   |                |
|------|---|----------------|
|      | Finalizare  |                |
| c)   | $\det(A(x)) = 1 \neq 0$ , deci matricea este inversabilă<br>$A(x)A(-x) = A(0) = I_3$<br>$A^{-1}(x) = A(-x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 4x^2 \\ 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  | 1p<br>2p<br>2p |
| 2.a) | $x * \frac{1}{2} = \frac{1}{2} * x = x, \forall x \in G$<br>Verificare<br>Legea "*" are element neutru $e = \frac{1}{2}$  | 1p<br>3p<br>1p |
| b)   | Orice element din $G$ este simetrizabil și $x' = 1 - x$<br>$0 < x' < 1$ , deci $x' \in G$   | 3p<br>2p       |
| c)   | Justificarea faptului că funcția $f$ este bijectivă<br>$f(x * y) = \frac{1}{x * y} - 1 = \frac{(x-1)(y-1)}{xy}$<br>$f(x)f(y) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right) = \frac{(x-1)(y-1)}{xy} = f(x * y)$ | 2p<br>2p<br>1p |

**SUBIECTUL al III-lea**
**( 30 de puncte)**

|      |  |                      |
|------|--|----------------------|
| 1.a) | $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} =$<br>$= \lim_{x \rightarrow 5} (x - 2)(x - 3)(x - 4) =$<br>$= 6$  | 2p<br>2p<br>1p       |
| b)   | $\frac{f(n+1) - 1}{f(n) - 1} = \frac{n - 1}{n - 5}$<br>$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(n+1) - 1}{f(n) - 1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n - 1}{n - 5} \right)^n =$<br>$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{4}{n - 5} \right)^n =$<br>$= e^4$ | 1p<br>1p<br>1p<br>2p |
| c)   | $f(2) = 1, f(3) = 1, f(4) = 1, f(5) = 1$<br>$f$ continuă pe intervalele $[2, 3], [3, 4], [4, 5]$<br>$f$ derivabilă pe intervalele $(2, 3), (3, 4), (4, 5)$<br>Din teorema lui Rolle și din faptul că $f'$ este de gradul trei rezultă că $f'(x) = 0$ are exact trei soluții reale distincte    | 1p<br>1p<br>1p<br>2p |
| 2.a) | $I_0 = \int_0^1 \frac{1 - x}{x^2 + 1} dx =$<br>$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctg x \Big _0^1 = \frac{\pi}{4}$  | 1p<br>2p<br>2p       |

|           |  |  |
|-----------|--|--|
|           | $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big _0^1 = \frac{\ln 2}{2}$ $I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$   | <b>1p</b>  |
| <b>b)</b> | $I_2 - I_0 = \int_0^1 \frac{(x^2+x+1)^2 - 1}{x^2+1} dx =$ $= \int_0^1 (x^2 + 2x + 2) dx - \int_0^1 \frac{2}{x^2+1} dx =$ $= \frac{10}{3} - 2 \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} =$ $= \frac{10}{3} - \frac{\pi}{2} \notin \mathbb{Q}$ | <b>1p</b><br><br><b>1p</b><br><br><b>1p</b><br><br><b>2p</b> |
| <b>c)</b> | $X^2+1 \text{ divide } (X^2+X+1)^{4n+1} - X$ $\frac{(x^2+x+1)^{4n+1} - x}{x^2+1} = g(x), \text{ unde } g \in \mathbb{Z}[X]$ $\int_0^1 g(x) dx \in \mathbb{Q}$  | <b>2p</b><br><br><b>1p</b><br><br><b>2p</b>                  |