PLANUL UNITĂȚII DE ÎNVĂȚARE

Autorul unităţii de învăţare

Prenume şi nume	*OARCEA MONIKA DIANA*
Judet	*TIMIŞ*
Denumire şcoală	*ECO-ŞCOALA NR.16 "TAKE IONESCU"*
Localitate	*TIMIŞOARA*

Prezentare generală a unităţii de învăţare

Titlul planului unităţii de învăţare

NUMERE NATURALE

Rezumatul unităţii de învăţare

În această unitate de învăţare, elevul va reîntâlni noţiunile studiate în clasele primare şi le va studia dintr-o altă perspectivă. Va învăţa să folosească operaţiile studiate în rezolvarea de probleme, compunerea de probleme. La noţiunile ştiute se vor adăuga ridicarea la putere şi divizibiliatea.

Aria tematică

MATEMATICĂ

Clasa ***a V-a***

Timp aproximativ necesar

38 lecţii a câte 50 de minute	10săptămâni	2,4luni

Reperele unităţii de învăţare

Standarde de performanţă - obiective de referinţă/ competenţe specifice

Identificarea unor date şi relaţii matematice şi corelarea lor în funcţie de contextul în care au fost definite
CS1 Identificarea caracteristicilor numerelor naturale şi a formei de scriere a unui număr natural în contexte variate
Exerciții de scriere şi de citire a numerelor naturale în sistemul de numerație zecimal
Determinarea unui număr natural pe baza unor condiții impuse cifrelor sale
Exerciții de reprezentare a numerelor naturale pe axa numerelor
Exerciții de scriere a unui număr natural ca produs de două sau de mai multe numere naturale şi deducerea relației de divizibilitate
Exerciții de identificare a numărului de unități, zeci, sute, mii etc. ale unui număr natural
Exerciții de scriere a numerelor naturale care să evidențieze cifrele unităților, zecilor, miilor... (reprezentări de tipul $762 = 7 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 2$)
Exerciții de scriere a unui număr natural în formă convențională (de tipul $\overline{ab} = 10a + b$)
Calculul puterii cu exponent natural a unui număr natural prin înmulțire repetată
Exerciții de scriere a unui număr natural folosind puterile lui 10

Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunţuri matematice
CS1 Utilizarea operaţiilor aritmetice şi a proprietăţilor acestora în calcule cu numere naturale
Exerciţii de adunare/scădere a numerelor naturale
Exerciţii de înmulţire a numerelor naturale
Exerciţii şi probleme de aplicare a împărţirii cu rest
Exerciţii de respectare a ordinii efectuării operaţiilor în paranteze rotunde şi/sau pătrate
Exerciţii de calcul a unor expresii numerice care conţin paranteze (rotunde, pătrate şi acolade), cu respectarea ordinii efectuării operaţiilor
Exerciţii de utilizare a factorului comun
Utilizarea algoritmilor şi a conceptelor matematice pentru caracterizarea locală sau globală a unei situaţii concrete
CS1 Selectarea şi utilizarea de algoritmi pentru efectuarea operaţiilor cu numere naturale şi pentru divizibilitatea cu 10,2 şi 5
Exerciţii de evidenţiere şi de aplicare a proprietăţilor adunării numerelor naturale
Exerciţii de evidenţiere şi de aplicare a proprietăţilor înmulţirii numerelor naturale
Exerciţii de utilizare a distributivităţii înmulţirii faţă de adunarea/scăderea numerelor naturale
Utilizarea algoritmului împărţirii, cu restul egal cu zero, în cazul în care deîmpărţitul şi împărţitorul au una sau mai multe cifre
Utilizarea algoritmului împărţirii, cu restul diferit de zero, în cazul în care deîmpărţitul şi împărţitorul au una sau mai multe cifre
Exerciţii de selectare a numerelor divizibile cu 2, 5, 10 dintr-o mulţime de numere dată
Caracterizarea noţiunii de divizor folosind împărţirea cu rest
Exprimarea caracteristicilor matematice cantitative sau calitative ale unei situaţii concrete şi a algoritmilor de prelucrare a acestora
CS1 Exprimarea, în rezolvarea sau compunerea unor probleme, a soluţiilor unor ecuaţii de tipul: $x \pm a = b$; $a \pm x = b$; $x \cdot a = b$ ($a \neq 0$, *a divizor al lui b*); $x : a = b$ ($a \neq 0$); $a : x = b$ ($x \neq 0$, *b divizor al lui a*) *şi a unor inecuaţii de tipul:* $x \pm a \leq b$ ($\geq,<,>$); $x \cdot a \leq b$ ($\geq,<,>$), *unde a este divisor al lui b;* $x : a \leq b$ ($\geq,<,>$), *cu* $a \neq 0$, *unde a şi b sunt numere natural*
Determinarea unui termen al adunării/scăderii dintr-o egalitate sau o inegalitate prin încercări, prin proba operaţiei respective sau prin metoda mersului invers
Introducerea noţiunilor de ecuaţie şi de inecuaţie pornind de la următoarele tipuri de relaţii: $x \pm a = b$; $a \pm x = b$; $x \cdot a = b$, cu $a \neq 0$, a divizor al lui b; $x : a = b$, cu $a \neq 0$; $a : x = b$, cu $x \neq 0$, b divizor al lui a; $x \pm a \leq b$ ($\geq,<,>$); $x \cdot a \leq b$ ($\geq,<,>$), cu a divizor al lui b; $x : a \leq b$ ($\geq,<,>$), cu $a \neq 0$
Analizarea textului unei probleme în vederea identificării operaţiilor aritmetice utilizate în re-
Formularea unor probleme pe baza unor scheme, modele sau reguli şi soluţionarea acestora prin utilizarea unor tehnici variate
Rezolvarea unor probleme cu text cu ajutorul ecuaţiilor sau al inecuaţiilor
Redactarea rezolvării problemelor, cu argumentarea etapelor de rezolvare
CS3 Exprimarea, în rezolvarea sau compunerea unor probleme, a soluţiilor unor ecuaţii de tipul: $x \pm a = b$; $a \pm x = b$; $x \cdot a = b$ ($a \neq 0$); $x : a = b$ ($a \neq 0$); $a : x = b$ ($x \neq 0$) *şi a unor inecuaţii de tipul:* $x \pm a \leq b$ ($\geq,<,>$); $x \cdot a \leq b$ ($\geq,<,>$); $x : a \leq b$ ($\geq,<,>$), *cu* $a \neq 0$, *unde a şi b sunt numere naturale sau fracţii zecimale finite*
Analizarea textului unei probleme în vederea identificării unei ecuaţii care poate fi utilizată în
Rezolvarea şi verificarea soluţiilor unor ecuaţii de tipurile: $x \pm a = b$; $a \pm x = b$; $x \cdot a = b$ ($a \neq 0$); $x : a = b$ ($a \neq 0$); $a : x = b$ ($x \neq 0$), unde a şi b sunt numere naturale sau fracţii zecimale finite

Rezolvarea unor probleme practice folosind ecuaţii/inecuaţii
Verificarea corectitudinii rezolvării unei ecuaţii prin înlocuirea soluţiei în ecuaţie/inecuaţie
Redactarea rezolvării unei ecuaţii/inecuaţii, cu argumentarea etapelor de rezolvare

Analiza şi interpretarea caracteristicilor matematice ale unei situaţii-problemă
CS1 Deducerea unor proprietăţi ale operaţiilor cu numere naturale pentru a estima sau pentru a verifica validitatea unor calcule
Identificarea, pe baza estimării, a rezultatelor unor calcule cu numere naturale dintr-o listă de răspunsuri
Exerciţii care pun în evidenţă avantajele folosirii proprietăţii operaţiilor cu numere naturale în contexte matematice şi practice
Exerciţii de evidenţiere a avantajelor utilizării factorului comun în contexte variate
Modelarea matematică a unor ntexte problematice variate, prin integrarea cunoştinţelor din diferite domenii
CS1 Transpunerea unei situaţii problemă în limbaj matematic, rezolvarea problemei obţinute (utilizând ecuaţii, inecuaţii,organizarea datelor) şi interpretarea rezultatului
Formularea unor probleme pe baza unor scheme, modele sau reguli şi soluţionarea acestora prin utilizarea unor tehnici variate
Exerciţii de transcriere a unei situaţii-problemă în limbaj matematic înlocuind numerele necunoscute (numere naturale) cu simboluri
Formularea unei probleme pornind de la o ecuaţie /inecuaţie dată
Formularea unei probleme pornind de la un enunţ parţial, discutând diferite variante de dezvoltare a formulării date
Utilizarea unor metode diferite în rezolvarea unei probleme cu numere naturale şi interpretarea rezultatului
Rezolvarea unor probleme practice utilizând ecuaţii şi inecuaţii
Transpunerea informaţiilor dintr-o problemă în limbajul matematic al ecuaţiilor, rezolvarea acestora şi interpretarea rezultatului
CS3 Transpunerea unei situaţiiproblemă în limbaj matematic, rezolvarea problemei obţinute (utilizând ecuaţii sau inecuaţii) şi interpretarea rezultatului
Exerciţii de transcriere a unei situaţii-problemă în limbaj matematic înlocuind numerele necunoscute (fracţionare şi zecimale) cu simboluri
Formularea unei probleme pornind de la o ecuaţie /inecuaţie dată
Formularea unei probleme pornind de la un enunţ parţial, discutând diferite variante de dezvoltare a formulării date
Utilizarea unor metode diferite în rezolvarea unei probleme şi interpretarea rezultatului
Transpunerea informaţiilor dintr-o problemă în limbajul matematic al ecuaţiilor, rezolvarea acestora şi interpretarea rezultatului
Exerciţii de argumentare a demersului de rezolvare a unei probleme utilizând ecuaţii sau inecuaţii

Obiective operaţíonale/rezultate aşteptate	
Nota 5	*să scrie şi să citească numere naturale,*
	să recunoască numere naturale şi numere întregi
	să reprezinte pe axă numere naturale şi numere întregi
	să compare două numere naturale; să ordoneze mai multe numere naturale
	să opereze cu numere naturale (fără puteri) folosind cel mult trei termeni şi / sau trei factori (împărţire fără rest)
	să calculeze pătratul şi cubul unui număr natural
	să calculeze media aritmetică a două / trei numere naturale, cu rezultat număr natural
	să enunţe criteriile de divizibilitate cu 10, 2, 5
	să recunoască numere divizibile cu 10, 2, 5 într-o mulţime de numere dată
	să verifice dacă un număr natural dat este soluţie a unei inecuaţii de tipul $x \pm a < b$; $x \cdot a < b$; $x : a < b$ *unde a şi b numere naturale*
Nota 7	*să expliciteze scrierea unui număr natural dat, în baza zece*
	să scrie un număr natural ca produs de factori
	să utilizeze reprezentarea pe axă a numerelor naturale
	să opereze cu numere naturale, folosind proprietăţile operaţi
	să efectueze împărţirea cu rest a două numere naturale
	să calculeze puterea, cu exponent număr natural, a unui număr natural
	să calculeze media aritmetică a mai multor numere naturale
	să rezolve în N inecuaţii de tipul $x \pm a < b$; $x \cdot a < b$; $x : a < b$ *unde* $a \in N^*$, $b \in N$
	să transpună în limbaj matematic enunţul unei probleme
	să rezolve probleme simple prin metoda reducerii la unitate sau prin metoda figurativă sau cu ajutorul ecuaţiilor
	să aproximeze un număr natural, prin lipsă, prin adaos, sau prin rotunjire la cea mai apropiată zece, sută sau mie
	să stabilească dacă un număr este divizorul / multiplul unui alt număr natural
	să utilizeze divizibilitatea în rezolvarea unor exerciţii şi a unor probleme simple
Nota 9	*să utilizeze, în rezolvarea unor probleme simple, explicitarea scrierii numerelor naturale în baza zece*
	să compare / să ordoneze puteri de forma ab , ac sau ba , ca cu $a,b,c \in N^*$
	să compare / să ordoneze puteri de forma ab , ac sau ba , ca cu $a,b,c \in N^*$
	să redacteze, cu mici omisiuni, rezolvarea unei probleme
	să rezolve în N ecuaţii şi inecuaţii, cu ajutorul proprietăţilor operaţiilor studiate
	să rezolve probleme prin metoda reducerii la unitate sau prin metoda figurativă sau cu ajutorul ecuaţiilor / inecuaţiilor

Nota 10	*unor probleme, explicitarea scrierii numerelor naturale în baza zece, analiza mai multor situaţii sau abilitatea de a evita capcanele unor greşeli specifice*
	să compare / să ordoneze puteri $(an ; a,n \in N^*)$, folosind diverse reguli
	să aplice media aritmetică în rezolvarea unor probleme
	să redacteze complet rezolvarea unor exerciţii şi probleme
	să construiască exerciţii şi probleme care au ca model ecuaţiile şi inecuaţiile studiate
	să utilizeze ecuaţiile şi inecuaţiile în rezolvarea unor probleme care necesită anumite artificii, analiza mai multor situaţii sau abilitatea de a evita capcanele unor greşeli specifice
	să evalueze rezultatul unor operaţii, înainte de efectuarea calculului, utilizând estimarea termenilor / factorilor

Intrebări-cheie ale curriculumului

Întrebare esenţială	În magazin, la cumpărături, poţi calcula şi estima suma pe care o vei cheltui?
Întrebările unităţii de învăţare	Cum voi aplica operațiile cu numerele naturale în diverse probleme din mediul înconjurător?
întrebări de conţinut	Ce este factorul comun şi cum mă ajută în rezolvarea exercițiilor şi problemelor? Ce sunt divizorii şi multiplii şi care este diferența dintre cele două noțiuni?

Plan de evaluare

Graficul de timp pentru evaluare

Evaluare iniţială		**Evaluare formativă**		**Evaluare finală**	
Brainstorming Chestionarea	Chestionar privind stilurile de învățare Test de evaluare inițială – identificarea abilitatilor de lucru cu calculatorul Jurnal de reflecție Harta "ştiu – vreau să ştiu – am învățat	Chestionarea Observarea grupului Observaţii informale pentru monitorizarea progresului Autoevaluarea experimentuluiAutoevaluarea aplicaţiilor	Instrument de chestionare grup Tabel de verificare Listă verificare prezentare Harta "ştiu – vreau să ştiu – am învățat" Test de evaluare Fişe de lucru	Chestionarea Prezentarea poroforiilor Interevaluare Evaluare	Grilă scorare Test de evaluare sumativă Autoevaluarea aplicatiei elevului Harta "ştiu – vreau să ştiu – am învățat Chestionar de interevaluare chestionar de feedback

Evaluare – sumar

Evaluarea iniţială 1 ora *Se aplică elevilor o grilă de verificare a abilităţilor în privinţa utilizării resurselor tehnologice. Pentru evaluarea nevoilor de cunoaştere ale elevilor, se alege un grafic KWL. Completarea lui va continua pe tot parcursul unităţii constituind astfel şi un prilej de autoevaluare pentru elevi. Şedinţa de brainstorming permite profesorului să verifice dacă elevii au cunoştinţele necesare pentru a trece la o nouă unitate de învăţare.*	***Evaluarea formativă -5 ore*** *Pe parcursul unităţii vor fi monitorizate abilităţi ale secolului XXI prin intermediul unor liste: lista de observare directă, lista de verificare publicaţie/ prezentare/ wiki, lista de verificare a muncii în echipă. Alături de fişele de lucru si testele completate sistematic de elevi, aceste instrumente vor permite atât elevilor, cât şi profesorilor, să monitorizeze progresul.*	***Evaluarea sumativă 2 ore*** *Evaluarea sumativă se realizează pe baza unui test de evaluare, precum şi prin susţinerea în faţe clasei a unui produs final. Analiza tabelului KWL va permite evauarea valorii adăugate la capitolul cunoaştere. Evaluarea portofoliului va fi făcută pe baza unei grile care li se va pune la dispoziţie elevilor din prima oră, alături de toate instrumentele de evaluare de asemenea elevii vor primi un chestionar de interevaluare si un chestionar de feedback. Astfel, elevul îşi poate regla si imbunatatii activitatea pe parcurs, astfel încât, la final va fi practic pregătit să-şi autoevalueze întreaga activitate.*

Evaluare	Descriere şi scop în evaluare	Evaluare inițială	Evaluare formativă	Evaluare finală
Liste de verificare	Monitorizeaza procesele, progresele si rezultatele obtinute. Pot fi si un instrument in autoevaluare. Ofera elevilor repere pentru activitatea din cadrul proiectului. Ofera feedback.			
Stabilirea obiectivelor	Obiectivele sunt masurabile si indica ce va fi elevul capabil sa faca elevul la finalul proiectului (performanta) si se in termeni de comportament. Obiectivele proiecteaza intreg demersul pedagogic s trebuie sa fie in concordanta cu ceea ce evalueaza			
Observarea grupului	Faciliteaza evaluarea abilitatilor de colaborare in grup. Se utilizeaza in timpul proiectului luând notite si oferind suport in timp ce grupul lucreaza pentru indeplinirea sarcinilor			
Feedback din partea colegilor	Regleaza demersul viitor al elevilor.			
Lista de verificare a progresului	Se utilizeaza in monitorizare. Este necesara cand sunt cerinte specifice si secventiale si pentru respectarea termenelor proiectului.			
Grila de criterii	Se foloseste in cadrul evaluarii sumative pentru demonstrarea intelegerii si a abilitatilor. Este sub forma unui tabel in care sunt enumerate caracteristicile urmarite si descriptorii de performanta pe patru nivele. Are rol si in autoevaluare			
Tabelul Stiu-Vreau sa stiu-Am invatat	Permite elevilor sa realizeze conexiuni inainte de a dezvolta un continut Acest tabel ofera posobilitatea de a se gandi la ceea ce stiu despre subiect, dea nota ce doresc sa alfe si in final de a inregistra ce au invatat			
Potofoliul	Intocmirea potofoliilor permite evaluarea progresului elevilor, a proceselor si a performantei in timpIngloebeaza munca si achizitiile din timpul proiectului.			
Produsele elevilor	Reprezinta rezultatul muncii din timpul proiectului, demonstreaza intelegerea. Pot fi evaluate pe baza unei grile de criterii si notate cu ajutorul unui ghid de notare.			

Detalii ale unităţii de învăţare

Aptitudini şi capacităţi obligatorii

deprinderi de a utiliza termeni de specialitate;
abilităţi practice de lucru cu programe Microsoft Office;
abilităţi de navigare şi documentare pe Internet.

Procedee de instruire

Scopul proiectului este acela de a-i face pe copii să înţeleagă cat de important este să înveţe ,să caute singuri informaţii, să ia decizii
expunerea, prelegerea, conversatia
predare si comunicare; fixare si consolidare;
bazate pe descoperirea proprie a elevilor;
metode individuale; in grupuri; frontale, cu intreaga clasa;metode combinate

Adaptare pentru diferenţierea instruirii

Elevul cu dificultăţi de învăţare	Instruirea diferențiată în cadrul grupei de elevi poate fi asigurată prin: - sarcini diferențiate pentru elevul cu dificultăți de învățare - punerea la dispoziție a unor materiale ajutătoare care să îi ajute în realizarea sarcinii - acordarea timpului suplimentar pentru studiu şi rezolvarea sarcinii - repartizarea într-o grupă cu mai mulți membri
Elevul vorbitor de limbă română ca limbă străină	Nu este cazul
Elevul supradotat	Instruirea diferențiată în cadrul grupei de elevi poate fi asigurată prin: - studiul independent, urmat de prezentarea individuală a informațiilor găsite în fața colegilor (de ex. curiozități legate de tema aleasă) - colaborarea cu profesorul în realizarea unor materiale necesare proiectului

Materiale şi resurse necesare pentru unitatea de învăţare

Tehnologie—Hardware (indicaţi, prin marcare, toate echipamentele necesare)

☐ Aparat foto	☐ Disc laser	☐ Video	☐ Conexiune Internet	☐ DVD Player	☐ Televizor
☐ Computer (e)	☐ Imprimantă	☐ Video Camera	☐ Aparat foto digital	☐ Sistem de proiecţie	☐ Echipament pt. Video
☐ Conferinţă	☐ Scanner	☐ Altele			

Tehnologie— Software (indicaţi, prin marcare, toate echipamentele necesare)

☐ Bază de date/ Calcul tabelar	☐ Procesare imagine	☐ Creare pagină web	☐ Software de e-mail
☐ Tehnoredactare	☐ Browser de Internet	☐ Procesare documente	
☐ Enciclopedie pe CD-ROM	☐ Multimedia	☐ Altele	

Materiale tipărite	Manuale, ghiduri curriculare, cărţi cu poveşti sau studii de caz, manuale de laborator, materiale de referinţă etc.
Resurse suplimentare	Elemente esenţiale care trebuie comandate sau adunate pentru a implementa unitatea de învăţare, specifice disciplinei de studiu. Nu includeţi elemente generale, care sunt comune oricărei lecţii.
Resurse Internet	Adrese web (URL) necesare în implementarea unităţii de învăţare.
Alte resurse	Excursii, experimente, invitaţi, mentori, alţi elevi/ clase, membri ai comunităţii, părinţi ş.a.m.d.

Numere naturale

Numerele naturale sunt reprezentate prin cifre sub forma urmatorului sir :
0,1,2,3, ... ,10,11, ...
Sirul numerelor naturale este infinit.
Numerele naturale se pot reprezenta pe o dreapta.
O dreapta pe care am fixat originea, un sens si o unitate de masura se numeste axa a numerelor.

Inegalitatea dintre numere naturale

Vom spune ca un numar natural a este mai mare decat un numar natural b si vom scrie a>b, daca exista un numar natural c, diferit de numarul 0, astfel incat a=b+c.
Acest lucru se nuemste si inegalitate stricta.
Daca avem doua numere naturale a,b si dorim a indica faptul ca "a>b sau a=b" inegalitatea este nestricta.
Criterii de inegalitate a numerelor naturale :
- este mai mare numarul in care o cifra este mai mare decat cifra de acelasi ordin din cel de-al doilea numar, cifrele de ordine superioare fiind egale doua cate doua.
- dintre doua numere naturale, care nu au acelasi numar de cifre, este mai mare acela care are mai multe cifre

Numerele naturale se scriu prin combinarea unora din cele 10 simboluri: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, numite **cifre**.

Sistemul de scriere care foloseşte pentru scrierea numerelor aceste 10 cifre se numeşte **sistem de numeraţie zecimal**.

In sistemul zecimal:

- **zece unităţi** formează **o zece**;

- **zece zeci** formează **o sută**;
- **zece sute** formează **o mie**

Pentru a citi un număr separăm cifrele sale în grupe de câte trei, de la dreapta spre stânga.

Grupele obţinute astfel se numesc **clase**.

De la dreapta spre stânga avem:

- **clasa unităţilor**;
- **clasa miilor**;
- **clasa milioanelor**;
- clasa miliardelor; etc…

Valoarea indicată de o cifră depinde de poziţia sa în număr.

Scrierea numerelor în acest mod se numeşte şi **scriere poziţională**.

In afară de scrierea poziţională mai există şi **scrierea adiţională**, cu **cifre romane**, care este foarte puţin utilizată în prezent.

Romanii foloseau ca cifre şapte simboluri:

I = 1; V = 5; X = 10; L = 50; C = 100; D = 500; M = 1 000.

La citirea şi scrierea numerelor cu ajutorul cifrelor romane trebuie respectate urmatoarele reguli:
1.O cifră cu o valoare mai mică scrisă la dreapta uneia cu valoarea mai mare indică o **sumă**: XI = X + I = 10
2.Cifrele I, X, C, M pot fi scrise consecutiv (una după alta) **de cel mult trei ori**.
3. Nu se pot repeta consecutiv cifrele V, L, D.
4. O cifră cu o valoare mai mică scrisă la stânga uneia cu valoarea mai mare indică o **scădere**: IX = X – I = 10 – 1 = 9.
5. Nu se poate scădea mai mult de o cifra:
a) 49 = IL;
b) 48 ≠ IIL = 50 – 2 ci
48 = XLVIII = 40 + 5 + 3
6. Cifrele V, L, D nu se pot scădea.
7. Orice cifră (sau grup de cifre) barată deasupra cu o linie orizontală se consideră multiplicată de 1 000 de ori:

$\overline{X}$ = 10 000; $\overline{ZL}$ = 40 000.

Operatii cu numere naturale

A d u n a r e a

$T_1 + T_2 = S$

Termeni **Suma**

Prin suma a doua numere naturale a si b numiti termenii sumei se obtine un al treilea numar natural notat s=a+b.
Proprietati:
1. comutativitate : a+b=b+a
2. asociativitate : (a+b)+c=a+(b+c)
3. elementul neutru 0 : a+0=a

Folosind proprietatile adunarii putem efectua mai repede calculele.

Matematicianul Gauss a folosit proprietatile adunarii pentru a calcula o suma de numere naturale consecutive**.**

Exemplu:

1. 1+2+3+4+……….96+97+98+99+100=(1+100)+(2+99)+(3+98)+(4+97)+……(45+46)=101+101+101+…………
101=101 • 100=
=10100

2.
1+2+3+4+……….96+97+98+99=(1+99)+(2+98)+(3+97)+(4+96)++……….(44+46)
+45=100+100+100+100+…….100+45=
=100 • 98+45=9800+45=9845

Observam ca in aceasta a doua suma avem un numar impar de termeni, deci avem un termen in mijloc care ramane singur.

Observatie.

*Numarul de termeni ai unei sume este**:u-p+1** unde **u** este ultimul termen ,iar **p** este primul termen.*
Daca un termen al unei sume are n cifre, iar celalaltare cel mult n cifre, suma lor are cel putin n cifre si cel mult n+1 cifre.

S c a d e r e a

D – S = R

Diferenta (rest)

Descazut **Scazator**

Daca a si b sunt doua numere naturale astfel incat a mai mare sau egal cu b, diferenta
dintre a si b, notata prin a-b, este acel numar natural c, pentru care a=b+c.
Termenul a se numeste descazut, iar b scazator.

Observatie.

Intr-o scadere in care scazatorul este mai mare decat descazutul, rezultatul nu este un numar natural.
47-76=
Pentru a scadea o suma dintr-un numar, scadem fiecare termen al sumei din numarul dat.
40-(3+14+5)=40-3-14-5=37-14-5=23-5=18
a-(b+c+d)=a-b-c-d

3. Ordinul de marime al diferentei este cel mult egal cu ordinul de marime al descazutului
c

Inmultirea

$F_1 \cdot F_2 = P$

Factori ***Produs***

Produsul unui numar natural, diferit de 0 sau 1, se exprima printr-o suma in care primul numar natural apare ca termen de atatea ori de cate ori arata al doilea numar natural.

Exceptii :

- produsul unui numar natural cu 0 este 0.
- produsul unui numar natural cu 1 este numarul natural considerat.

Proprietati :

1. comutativitate : a*b=b*a
2. asociativitate : (a*b)*c=a*(b*c)
3. element neutru 1 : a*1=a
4. distributivitatea fata de adunare : a*(b+c)=a*b+a*c
5. distributivitatea fata de scadere : a*(b-c)=a*b-a*c

FACTOR COMUN

ab+ac=a(b+c)

ab-ac=a(b-c)

Deoarece factorul a apare in toate produsele spunem ca a este *factor comun*.Egalitatile de mai sus exprima scoaterea factorului comun.

Observatii

1.Egalitatea si inegalitatea numerelor naturale se pastreaza daca se inmultesc ambii membrii cu acelesi numar natural, diferit de 0.

IMPARTIREA(IMPARTIREA CU REST)

Teorema impartirii cu rest $d = i \bullet c + r$; $r \langle i$

d este deimpartitul

i este impartitorul

c este catul

r este restul

$28 : 9 = 3(r = 1) \rightarrow 28 = 9 \bullet 3 + 1$

Observatii

Impartirea la 0 nu are sens.

La impartirea unui numar natural la 2 restul poate fi 0 sau 1. Daca n=2k, restul este 0, iar daca n=2k+1 restul este 1, unde k este catul.

La impartirea unui numar natural la 3, restul poate fi 0, 1, 2. Daca n=3k restul este 0, daca n=3k+1 restul este 1 si daca n=3k+2 restul este 2, iar k este catul.

Daca restul unei impartiri este 0 atunci impartirea este exacta. In acest caz avem $d = i \bullet c$

Daca numerele naturale a si b se impart exact la numarul natural c (c diferit de 0) atunci avem:

$$(a+b):c = a:c + b:c$$

Impartirea ca si inmultirea este o operatie de ordinul II.

Intr- un exercitiu fara paranteze se efectueaza intai operatiile de ordinul II.

Daca intr-un exercitiu avem numai operatii de ordinul II si nu avem paranteze, atunci operatiile se efectueaza in ordinea in care sunt scrise.

Egalitatea si inegalitatea numerelor naturale se pastreaza daca se impart exact mambrii acestora cu acelasi numar natural diferit de 0.

PUTERI

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$$

a , n sunt numere naturale — **n – factori**

a – se numeste baza — **n – se numeste exponent**

Reguli de calcul cu puteri

$a^0 = 1$ $\quad$ $a^1 = a$ $\quad$ $0^n = 0$ $\quad$ $1^n = 1$

Daca **a, b, m, n** numere naturale atunci:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$a^m : a^n = a^{m-n}, \ m \geq n$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$
$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$
$$a^m : b^m = (a : b)^m, \ a \geq b$$

Patrate perfecte : a^2 , unde a este numar natural

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

a	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a^2	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400

Cuburi perfecte : a^3 , unde a este numar natural

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Divizibilitatea numerelor naturale

Definitia divizibilitati. Divizor. Multiplu

Definitie: *Un numar natural* a *este divizibil cu un numar natural* b *daca exista un numar natural* c *astfel incat* a = b c.
Exemplu: Fie numerele naturale 8 si 2. Exista oare un numar natural astfel incat in-multindu-l cu 2 sa obtinem 8? Da. Acest numar este 4. Intr-adevar: 8 = 2 4.
Se mai spune: *"a se divide cu b", "b divide pe a ", "b este divizor al lui a", "a este multiplu al lui b"*.
Daca *a* si *b* sunt numere naturale, *b* | *a* se citeste *"b divide pe a"* sau 2 | 6.
Definitie: *Fie* a *si* b *doua numere naturale. Spunem ca* b | a *daca exista un numar natural* c *astfel incat* a = b c.
Observatii:
Nu ***orice*** numar natural par este divizibil cu 4. De ex.:6 nu este divizibil cu 4.
Nu ***orice*** numar natural de forma 6n – 1, unde n apartine N*, se divide numai cu 1 si cu el insusi. De ex.: Daca n = 6, avem 6 6 – 1 = 35, iar 35cu 1, cu 35, cu 5 si cu 7.

Proprietati ale divizibilitatii numerelor naturale

Orice numar natural este divizibil cu 1 sau 1 | a oricare ar fi a apartine N.
0 este divizibil cu orice numar natural sau a | 0, oricare ar fi a apartine N.
Orice numar natural se divide cu el insusi sau a | a, oricare ar fi a apar-tine N.
Fie a si b doua numere naturale. Daca a este divizibil cu b si b este divizibil cu a atunci a = b sau daca a | b si b | a, oricare ar fi a, b apartine N.
Fie a, b, c trei numere naturale. Daca b se divide cu a iar c se divide cu b atunci c se divide cu a sau daca a | b si b | c, atunci a | c, oricare ar fi a,b,c apartine N. Daca un numar natural se divide cu nu numar natural, atunci primul se divide cu toti divizorii celui de-al doilea.
Daca fiecare termen al unei sume de doua numere naturale se divide cu un numar natural, atunci si suma lor se divide cu acel numar natural.
Daca un numar natural a se divide cu un numar natural m si daca un numar natu-ral b se divide cu acelasi numar natural m, atunci si suma lor a + b se divide cu m sau daca m | a si m | b, atunci m | a + b oricare ar fi a, b, m apartine N.
Daca unul din termenii unei sume de doua numere naturale se divide cu un numar natural, iar celalalt termen nu se divide cu acel numar natural, atunci suma nu se divide cu acel numar natural.
Fie numerele naturale a si b. Daca numarul a se divide cu numarul natural m si daca b nu se divide cu m atunci suma lor a + b nu se divide cu m sau daca m | a si m \| b,atunci m \| a + b oricare ar fi a, b, m apartine N.
(8) Fie a, b si m numerele naturale, a >b. Daca a se divide cu m si b se divide cu m atunci si a – b se divide cu m sau daca m | a si m | b, atunci m | a – b oricare ar fi a, b, m apartine N, a > b.
(9) Daca un numar natural a se divide cu un numar natural m, atunci produsul lui a cu orice numar natural se divide cu m, sau daca m | a, atunci m | ab, oricare ar fi a, b, m apartine N.

Criterii de divizibilitate

Criteriul de divizibilitate cu 10,100

Un numar natural a carui ultima cifra este zero este un numar divizibil cu 10, adica cu 2 5.

Un numar natural a carui ultima cifra nu este 0 nu este divizibil cu 10.

Un numar natural care are ca ultima cifra pe 0 se divide si cu 2 si cu 5.

Un numar natural la care ultimele doua cifre sunt zerouri se divide cu 100, adica cu 2 5.

Criteriul de divizibilitate cu 2

Daca ultima cifra a unui numar natural este o cifra para (0, 2, 4, 6, 8), atunci acel numar natural se divide cu 2.

Daca ultima cifra a unui numar natural nu este o cifra para, atunci acel numar natural nu se divide cu 2.

Criteriul de divizibilitate cu 5

Daca ultima cifra a unui numar natural este 5 sau 0, atunci acel numar se divide cu 5.

Daca ultima cifra a unui numar natural nu este nici 5, nici 0, atunci acel numar nu este divizibil cu 5.

Criteriul de divizibilitate cu 4

Daca numarul natural format din untimele doua cifre ale unui numar natural este divizibil cu 4, atunci numarul natural considerat este divizibil cu 4.

Daca numarul natural format din ultimele doua cifre ale unui numar natural nu este divizibil cu 4, atunci numarul natural considerat nu este divizibil cu 4.

Criteriul de divizibilitate cu 25

Daca numarul natural format din ultimele doua cifre ale unui numar natural este divizibil cu 25, atunci numarul natural considerat este divizibil cu 25.

Daca numarul natural format din ultimele doua cifre ale unui numar natural nu este divizibil cu 25, atunci numarul natural considerat nu este divizibil cu 25.

Criteriul de divizibilitate cu 3

Daca suma cifrelor unui numar natural este divizibil cu 3, atunci acel numar este divizibil cu 3.

Daca suma cifrelor unui numar natural nu este divixibila cu 3, atunci acel numar nu este divizibil cu 3.

Criteriul de divizibilitate cu 9

Daca suma cifrelor unui numar natural este divizibila cu 9, atunci acel numar este divizibil cu 9.

Daca suma cifrelor unui numar natural nu este divizibila cu 9, atunci acel numar nu este divizibil cu 9.

Multimea divizorilor unui numar natural

Divizorii lui 6(D) = {1, 2, 3, 6}

Divizorii lui 15(D) = {1, 3, 5, 15}

Divizori proprii. Divizori improrii

Orice numar natural m *are divizorii improprii 1 si* m. *Orice alt divizor se numeste divizor propriu.*

Exemplu: Multimea divizorilor lui 6 este D = {1, 2, 3, 6}.1 si 6 se numesc divizori improrii ai lui 6, iar 2 si 3 se numesc divizori proprii ai lui 6.

Multimea multiplilor unui numar natural

Multimea multiplilor lui 2 este M ={0, 2, 4, 6,…, 2n,…}

Multimea multiplilor lui 3 este M ={0, 3, 6, 9,…, 3n,…}

Numere prime

Definitie: *Se numeste prim orice numar natural, diferit de 1, care are ca divizori numai pe 1 si pe el insusi.*

Sau

Se numeste numar prim orice numar natural, diferit de 1, care admite numai divizori improprii.

Exemplu: Numarul 2 se divide numai cu 1 si cu 2, adica numai cu 1 si cu el insusi. Numarul 3 se divide, de asemenea, numai cu 1 si cu el insusi.

Urmatoarele numere sunt prime:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 47.

Orice numar natural care nu este prim se numeste *neprim.*

Numerele neprime diferite de 1 se numesc *numere compuse*.

De exemplu numerele naturale 0, 4, 6, 8, 10, 24, 1470 sunt compuse.

Cum recunoastem daca un numar natural este prim

Impartim numarul, pe rand, la toate numerele prime in ordine crescatoare, incepand cu 2, pana cand obtinem un cat mai mic ssau egal cu impartitorul. Daca numarul se divide cu unul din aceste numere prime, este evident ca el nu este prim. Daca numarul considerat nu se divide cu nici unul din aceste numere prime, atunci el este numar prim.

Exemplu numarul 137

137 nu se divide cu 2, cu 3, cu 5. Pentru a se vedea daca 137 se divide cu 7 facem impartirea lui 137 la 7 si obtinem catul 19 si restul 4. Deci 137 nu se divide cu 7. Pentru a se vedea daca 137 se divide cu 11, facem impartirea lui 137 la 11. Obtinem catul 12 si restul 5. Deci 137 nu se divide cu 11. Deoarece catul (12) este mai mare decat impartitorul (11), continuam sa facem impartiri. Pentru a vedea daca 137 se divide cu 13 facem impartirea si obtinem catul 10 si restul 7. Numarul 137 nu se divide cu 13. Am aratat ca 137 nu se divide cu nici un numar prim mai mic sau egal cu 13. Afirmam ca el nu se divide nici cu numerele compuse mai mici decat 13. Intr-adevar, daca 137 nu se divide cu 2, el nu se divide nici cu urmatorii multiplii ai lui 2:4, 6, 8, 10, 12, iar daca 137 nu se divide cu 3, el nu se divide nici cu 6, 9, 12. Pana aici am aratat ca numarul 137 nu se divide cu nici un numar natural, diferit de 1, mai mic sau egal cu 13. Este oare posibil ca 137 sa se divida cu un numar natural *c* mai mare decat 13 ?

Acest lucru nu este posibil, caci daca 137 se divide cu un numar *c* mai mare dacat 13, atunci el se divide si cu catul impartirii lui 137 la numarul natural *c*; acest cat este un numar mai mic decat 13. Or, am aratat ca 137 nu se divide cu nici un numar natural, diferit de 1, mai mic sau egal cu 13.

In concluzie: numarul 137 nu se divide cu nici un numar natural, diferit de 1, mai mic sau egal cu 13, nici cu un numar natural mai mare decat 13. El este deci numar prim.

Ciurul lui Eratostate

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Numerele prime mai mici dacat 100

Scrierea unui numar natural ca produs de puteri de numere prime

Consideram numarul 12 = 2 3

5544 = 2 2772 = 2 2 1386 = 2 2 2 693 = 2 2 2 3 231 = 2 2 2 3 3

77 = 2 2 2 3 3 7 11 = 2 3 7 11.

578000 2 5

578 2

289 17

17

1

578000 = 2 5 17

Inmultirea si impartirea numerelor naturale scrise ca produs de puteri de numere prime

A = 2 3 5 7; B = 2 3 5

A B = (2 3 5 7) (2 3 5) = 2 3 5 7

Ne intrebam daca B divide pe A, adica daca exista un numar natural C, astfel incat inmultind pe B cu C sa obtinem A.

A = B C

Se vede ca putem lua C =2 3 7, adica C = 2 3 7

Prin urmare, A se divide cu B. Acest lucru a fost posibil datorita faptului ca a fost indeplinita urmatoarea conditie:

A contine trei factori pe care ii contine B cu exponenti mai mari sau egali cu exponentii factoriloi lui B.

Divizor comun. Cel mai mare divizor comun al mai multor numere naturale

D {1, 2, 3, 4, 6, 12}, D {1,4, 5, 10, 20}

D = D D = {1, 2, 4}.

Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.) al celor doua numere este 4.

Cel mai mare divizor comun a doua sau al mai multor numere naturale, nu toate nule, este cel mai mare numar natural care divide numarele date.

Deci scriem: c.m.m.d.c.(12, 20)= 4 sau (12, 20)= 4.

Aflarea celui mai mare divizor comun prin descompunere in factori primii

Pentru a afla c.m.m.d.c. al unor numere procedam in felul urmator: luam, o singura data, factorii primi comuni, cu exponentii cei mai mici, cu care figureaza in descompuneri si ii inmultim intre ei.

Numerele prime intre ele

Doua numere naturale se numesc prime intre ele daca cel mai mare divizor comun al lor este 1.

(4, 9) = 1; (7, 8) = 1; (5, 7) = 1.

Daca un numar natural este divizibil cu doua numere naturale prime intre ele, atunci el este divizibil cu produsul acestora.

De exemplu, daca un numar natural este divizibil cu 2 si 3, atunci el este divizibil cu 6

Daca un numar natural este divizibil cu 5, 9 atunci el este divizibil cu 45.

<u>Observatie importanta:</u>

Atragem atentia ca, de exemplu, numarul 12 este divizibil cu 4 si 6, dar el nu este divizibil cu 4 6, adica 24. Numerele 4 si 6 nu sunt prime intre ele.

Multiplu comun. Cel mai mic multiplu comun al mai multor numere naturale

M = {0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36,…, 4n,…}

M = {0, 6, 12, 18, 24, 30, 36,…, 6n,…}

Multimea multiplilor comuni ai numerelor 4 si 6 M = {0, 12, 24, 36,…}

Cel mai mic multiplu comun al numerelor 4 si 6, diferit de zero, este, dupa cum se vede, 12

Cel mai mic multiplu comun al doua sau al mai multor numere naturale, diferite de zero, este cel mai mic numar natural, diferit de zero care se divide cu numerele date.

Deci scriem: [4, 6] = 12.

Aflarea celui mai mic multiplu comun prin descompunere in factori primi

Pentru a afla c.m.m.m.c. al acestor numere procedam in felul urmator: luam, o singura data, factorii primi comuni si necomuni cu exponentii cei mai mari si ii inmultim intre ei.

Observatie

C.m.m.m.c. al mai multor numere naturale divide orice multiplu comun al lor.

Numerele pare. Numerele impare

Urmatorul sir de numere naturale: 0, 2, 4, 6, 8,… se numeste sirul numerelor naturale pare, iar sirul de numere naturale: 1, 3, 5, 7, 9,…se numeste sirul numerelor naturale impare.

Numerele naturale pare sunt numerele de forma 2n unde n apartine N.

Numerele naturale impare sunt numerele de forma 2n + 1, unde n apartine N.

Suma a doua numere naturale pare este un numar par.

Suma a doua numere naturale impare este un numar par.

Suma dintre un numar par si un numar natural impar este un numar impar.

ECUATII

Aflarea termenului necunoscut x :

$x + a = b$, $a < b$ $\qquad$ $a + x = b$, $a < b$
$x = b - a$ $\qquad$ $x = b - a$

2. $x - a = b$ $\qquad$ $a - x = b$, $a > b$
$x = b + a$ $\qquad$ $x = a - b$

3. $x \cdot a = b$, $b > a$ $\qquad$ $a \cdot x = b$, $b > a$
$x = b : a$ $\qquad$ $x = b : a$

4. $x : a = b$ $\qquad$ $a : x = b$, $a > b$
$x = b \cdot a$ $\qquad$ $x = a : b$

INECUATII

Aflarea termenilor necunoscuti x :

1. $x + a \leq b$, $a < b$ $\qquad$ $a + x \leq b$, $a < b$
$x \leq b - a$ $\qquad$ $x \leq b - a$

2. $x - a \leq b$ $\qquad$ $a - x \leq b$, $a > b$
$x \leq b + a$ $\qquad$ $x \leq a - b$

3. $x \cdot a \leq b$, $b > a$ $\qquad$ $a \cdot x \leq b$, $b > a$
$x \leq b : a$ $\qquad$ $x \leq b : a$

4. $x : a \leq b$ $\qquad$ $a : x \leq b$, $a > b$
$x \leq b \cdot a$ $\qquad$ $x \leq a : b$

ANEXĂ
Din istoria matematicii…
De peste patru milenii

Câteva curiozități din istoria numerelor şi nu numai…

„Dumnezeu a creat numerele naturale. Restul este opera omului.”

Leopold Kronecker
Matematician german (1823 – 1891)

Ştiați că …

… În anul 2700 î. Hr. egiptenii introduc calendarul bazat pe 365 de zile.
… În anul 2400 î. Hr.

În Mesopotamia se dezvoltă sistemul de numerație pozițional în baza 60. Numărul 60 este ales, probabil, ca o consecință a listei mari de divizori ai acestui număr (adică 12 divizori).

Sumerienii utilizează un calendar solar de 360 de zile împărțit în 12 luni.

… În anul 1800 î. Hr. mesopotamienii alcătuiesc primele tabele de înmulțire.
… În anul 585 î. Hr. utilizând proprietățile de divizibilitate a numerelor, Thales din Milet (636 – 546 î. Hr.) prezice o eclipsă de Soare.
… În anul 500 î. Hr. pitagorienii, lucrând cu numere reprezentate prin figuri, atribuie câte un sex fiecărui număr, cele impare sunt de sex masculin, cele pare, de sex feminin. Tot ei introduc noțiunile de număr prim, număr compus, numere relative prime, numere prime perfecte, numere prietene (amiabile).

Un număr este ***PERFECT*** dacă suma S a divizorilor săi (exceptând numărul însuşi) este egală cu numărul dat N.

Dacă $S > N$, atunci numărul este ***SUPRAPERFECT***, iar dacă $S < N$, numărul este ***IMPERFECT***.

Exemple de numere perfecte:

$$6 = 1+2+3;$$
$$28 = 1+2+4+7+14;$$
$$496= 1+2+4+8+16+31+62+124+248.$$

Exemple de numere supraperfecte:

$$12 < 1+2+3+4+6;$$
$$18 < 1+2+3+6+9;$$
$$20 < 1+2+4 +5+10.$$

Exemple de numere imperfecte:

$$14 >1+2+7;$$
$$16 > 1+2+4+8;$$
$$22 > 1+2+11.$$

Numerele ***PRIETENE (AMIABILE)*** sunt numerele care au proprietatea că fiecare este egal cu suma divizorilor celuilalt. Lui Pitagora ((570 – 500 î. Hr.) sau (580 – 496 î. Hr.)) i se atribuie găsirea primei perechi de numere prietene: 220 şi 284.

$$220 = 1+2+4+71+ 142;$$
$$284 = 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110.$$

… În anul 440 î. Hr. Meton din Atena dezvolta conceptul de ciclu metonic, o perioadă de aproximativ 19 ani, în care mişcarea Soarelui şi a Lunii observate de pe Pământ par a se suprapune. Acest ciclu stă la baza calendarelor grecesc şi evreiesc.

… În anul 300 î. Hr. Euclid (330 - 275 î. Hr.) prezintă o formulă a numerelor perfecte şi anume:

$\mathbf{2^{p-1} \cdot (2^{p} - 1)}$, unde **p** si $\mathbf{2^{p-1}}$ sunt numere prime.

… În anul 230 î. Hr. Eratostene din Cyrene (275 - 195 î. Hr.) dezvoltă o metodă de determinare a tuturor numerelor prime mai mici decât un număr dat: ***Ciurul lui Eratostene.***
… În anul 180 î. Hr. într-o lucrare de astronomie Hypsicles introduce uzanța împărțirii cerului în 360 de grade în matematica greacă.

… În anul 46 î. Hr. Iulius Cezar introduce, la sfatul astronomului Sosinge, calendarul compus din trei ani de 365 de zile şi un an de 366 de zile

… În anul 100 d. Hr. Nichomachus din Gerasa (secolul 1 – 2) strânge laolaltă toate cunostintele vremii în domeniul teoriei numerelor. Sunt prezentate cele patru numere perfecte cunoscute: 6, 28, 416 şi 8128.

… În anul 250 d. Hr. într-un tratat de matematică a chinezului Sun – Tzi (secolul 3) apare problema: „Să se găsească un număr care împărțit prin 3, 5, 7 să dea resturile 2, 3, respectiv 4", problemă provenită din necesitatea întocmirii calendarului. În algebra modernă, o astfel de problemă poartă numele de „lema chineză a restului".

… În anul 620 d. Hr.

- Indianul Brahmagupta din Ujain (598 – 660) a scris o lucrare care conține remarcabile cercetări asupra ecuațiilor diofantice.

Indienii folosesc regula lui 9 *(dacă numerele naturale se adună, se scad, se înmulțesc sau se împart fără rest, rezultatul este congruent modulo 9 cu numărul obținut prin adunarea, scăderea, înmulțirea sau împărțirea resturilor împărțirii la 9 a numerelor date)* pentru verificarea corectitudinii operațiilor aritmetice.

… În anul 1100 d. Hr. Jia Xien stabileşte o metoda de construcție a triunghiului de numere numit mai târziu triunghiul lui Pascal.

… În anul 1150 d. Hr. Aciarya Bhaskara (1114 – 1185) în lucrarea „Giuvaerul unui sistem astronomic" rezuma cunostintele indiene ale vremii din domeniul algebrei şi aritmeticii, concentrându-se asupra ecuațiilor diofantice.

… În anul 1200 d. Hr. Leonardo Pisano cunoscut sub numele de Fibonacci scrie lucrarea „Liber abaci", considerata timp de două secole cea mai competentă sursă de cunoştințe în teoria numerelor.

Sunt prezentate criteriile de divizibilitate cu 2, 3, 5, 9.

… În anul 1491 d. Hr.

- în lucrările de aritmetică ale lui Filippo Calandri se introduce algoritmul de împărțire cu un împărțitor mai mare decât 12.

Leonardo da Vinci (15.04.1452 – 2.05.1519) anticipează construirea ceasului cu pendul, al cărui mecanism utilizează principii de divizibilitate.

… În anul 1536 d. Hr. într-o lucrare de aritmetică a matematicianului Regius apare al cincilea număr perfect cunoscut: 33 350 336.

… În anul 1575 d. Hr. într-o lucrare de aritmetică este inclus primul rezultat cunoscut obținut prin inducție matematica: suma primelor n numere impare este egala cu n^2.

… În anul 1603 d. Hr. sunt găsite al şaselea şi al şaptelea număr perfect. Acestea sunt numerele miliardelor şi, respectiv, a sutelor de miliarde.

… În anul 1621 d. Hr. apariția în ediție bilingvă greacă – latină a „ Aritmeticii lui Diofante", reînvie studiul teoriei numerelor.

… În anul 1623 d. Hr. Wilhelm Schickardt construieşte prima maşină de calculat capabilă să facă adunări şi scăderi, iar ajutată de operator – înmulțiri şi împărțiri. Visul matematicienilor de a putea utiliza o maşină pentru efectuarea calculelor se apropie de realitate.

… În anul 1635 d. Hr. René Descartes (31.05.1596 – 11.02.1650)descoperă teorema, numită de urmaşi a lui Euler, conform căreia între numărul vârfurilor, muchiilor şi fetelor unui poliedru convex trebuie să existe relația:

$$V - M + F = 2,$$

unde V = numărul vârfurilor

M = numărul muchiilor

F = numărul fetelor

Această relație leagă proprietățile unui corp de o relație numerică.

… În anul 1636 d. Hr. Pierre Fermat (17.01.1601 – 12.01.1665) descoperă o a doua pereche de numere prietene după cele cunoscute de lumea antică (220 şi 284). Perechea descoperită este (17296 şi 18416).

… În anul 1640 d. Hr. Fermat formulează „mica teoremă" a numerelor:

„Dacă p este un număr prim, atunci orice număr întreg **a** numărul $\mathbf{a}^{p} - \mathbf{a}$ se divide cu p".

… *În anul 1642 d. Hr. pe o manşetă a unei lucrări de Diofante (325 - 409), Fermat afirma că:*

„Pentru toți întregii n mai mari decât 2, nu putem găsi trei întregi x, y, z astfel încât $x^n + y^n = z^n$".

Continua Fermat:

„Am descoperit o demonstrație remarcabilă a acestei propoziții, dar nu-mi ajunge o singură pagină".

Astfel s-a născut cojectură care avea să frământe cele mai strălucite minții ale matematicii, timp de mai multe secole.

… În anul 1656 d. Hr. studiile lui Hugens asupra cicloidei duc la crearea unui ceas precis şi a unui cronometru.

… În anul 1665 d. Hr.apare lucrarea lui Blaise Pascal (19.06.1623 – 19.08.1662) „Tratat despre triunghiul aritmetic" urmare a căreia triunghiul cu proprietățile cunoscute de mulți înaintaşi va purta numele lui Pascal.

Isaac Newton (25.12.1643 – 31.11.1727) descoperă teorema generală a dezvoltării binomului.

… În anul 1671 d. Hr. Wilhelm Gottfried Leibnitz (1.071696 – 14.11.1716) concepe o maşina de calcul care poate efectua operații de înmulțire şi împărțire.

… În anul 1676 d. Hr. este dată o soluție la marea teorema al lui Fermat, pentru n=4.

… În anul 1760 d. Hr. Leonhard Euler (15.04.1707 – 18.09.1783) utilizează funcția φ, introdusă de el pentru a demonstra că dacă două numere sunt prime unul față de celalalt, atunci unul dintre ele, oricare ar fi acesta, divide diferența obținut prin scăderea unui din celalalt ridicat la funcția φ a primului.

Recent, această teoremă a devenit fundamentală pentru codurile moderne „open – key”.

… În anul 1766 d. Hr. prin legea lui Johann Bode, „distanțele la care se afla planetele față de Soare sunt proporționale cu termenii şirului 3, 6, 12, 24, 48, 96”, se încearcă legarea astronomiei de teoria numerelor.

Descoperirea, în anul 1836, a planetei Neptun va dovedi că legea e greşită.

… În anul 1770 d. Hr. Euler demonstrează că teorema lui Fermat este adevărată pentru n = 3.

… În anul 1772 d. Hr. Christian Goldbach (8.03.1690 – 20.11.1764) emite ipoteza că orice număr par mai mare decât 2 este suma a doua numere prime. Ipoteza nu a fost nici confirmată, nici infirmată până în prezent.

Adrien Marie Legendre (18.09.1752 – 10.01.1833) afirma că nu există expresii raționale care să furnizeze numai numere prime.

… În anul 1790 d. Hr. ecuațiile de gradul al doilea cu coeficienți numere întregi şi cu soluții în mulțimea numerelor întregi de forma

$x^2 - dy^2 = 1$ (ecuații Pell (John Pell (1.03.1610 – 12.12.1685)))

capătă o importanță deosebită în teoria numerelor.

… În anul 1796 d. Hr. după ce studiază numerele prime, Karl Gauss (30.04.1777 – 23.02.1855) enunță legea reciprocității resturilor pătratice. Tot Gauss construieşte cu rigla şi compasul un poligon regulat cu 17 laturi.

… În anul 1800 d. Hr. Gauss rezolva problema găsirii poligoanelor regulate construibile cu rigla şi compasul, demonstrând că aceste poligoane trebuie să aibă 2^p laturi sau $2^{2^p}+1$, când $2^{2^p}+1$ este un număr prim.

… În anul 1801 d. Hr. marele Gauss demonstrează că fiecare număr natural este egal cu suma a cel mult trei numere triunghiulare.

Tot Gauss introduce noțiunea de congruență modulo p.

… În anul 1830 d. Hr. într-un tratat de algebra, George Peacock (9.04.1791 – 8.11.1858) face una dintre primele încercări cunoscute de formulare a legii fundamentale a aritmeticii.

… În anul 1839 d. Hr. Gabriel Lamé (22.07.1795 – 1.05.1870) dovedeşte valabilitatea teoremei lui Fermat pentru n = 7.

… În anul 1847 d. Hr. Ernest Kummel (29.01.1810 – 14.05.1893) introduce în teoria numerelor noțiunea de ideal o generalizare a numerelor prime care face posibil ca teorema fundamentală a aritmeticii să fie aplicată şi numerelor complexe.

… În anul 1850 d. Hr. matematicianul rus Pafnutie Lvovivici Cebâşev (26.05.1821 – 12.08.1894) demonstrează afirmația lui Bertrand: „ Pentru orice n număr natural, n > 2, avem cel puțin un număr prim cuprins între n şi 2n –2.”

… În anul 1860 d. Hr.

- Nicollo Paganini, elev de 16 ani, uluieşte lumea matematică, descoperind perechea (1184; 1210) de numere prietene. În ultimele secole se descoperă multe perechi de numere prietene, toate foarte mari.

Sunt folosite cutia de viteza şi capul divizor al strungului, invenții bazate pe rezultate al divizibilității numerelor naturale.

… În anul 1896 d. Hr. J. Hadamard (8.12.1865 – 17.10.1963) demonstrează că dacă a este un număr foarte mare numărul numerelor prime mai mici decât a este

$$\frac{a}{\log(a)}$$

… În anul 1909 d. Hr.

- S-au editat tabele cu numere prime mai mici decât 10 000 000 şi cu cei mai mici divizori ai numerelor compuse mai mici decât 1000 000.

Începe utilizarea în coduri numerice a proprietăților numerelor prime.

… În anul 1946 d. Hr. se naşte calculatorul electronic. Încă de la început, puterea sa de calcul va fi utilizată în căutarea numerelor prime.

… În anul 1959 d. Hr. W. Sierpinski (1882 - 1970) demonstrează că pentru n > 5, între numerele naturale n şi 2n avem cel puțin două numere prime.

… În anul 1980 d. Hr. L. Adleman şi R. Rumelig dezvoltă o metodă nouă şi îmbunătățită de testare a numerelor în vederea descoperii numerelor prime.

… În anul 1985 Hugh C. Wiliams şi Harvey Dumbar ajung la concluzia că numărul format din 1031 de cifre de 1 este prim.

… În anul 1996 d. Hr. cea mai celebră cojectură a istoriei este demonstrată! Andrew Wiles de la Institutul Isaac Newton din Cambridge dă demonstrația completă a marii teoreme a lui Fermat.

… În anul 2000 d. Hr. Matematicianul american Nayan Hayratwala a lucrat simultan cu mai mult de 20 de mii de calculatoare de pe întreg globul şi a obținut numărul prim $2^{6\,972\,593} - 1$ fiind cel mai mare număr prim cunoscut. Pentru scrierea acestui număr sunt necesare două milioane de cifre.

„Regina ştiinţelor este matematica, iar aritmetica este regina matematicii”

Karl GAUSS

Bibliografie

1. Ioan Dăncilă, Divizibilitatea numerelor. Clasele V – XII. Editura Sigma, 2001
2. Ioan Dăncilă, Matematica gimnaziului, între profesor şi elev. Editura Aramis, Bucureşti, 2001.
3. Ion Purcaru, Octavian Bâscă, Oameni, idei şi fapte din istoria matematicii. Din cele mai vechi timpuri şi până la sfârşitul secolului al XIX – lea. Editura Economica, 1996

Mihu Cerchez, Pitagora, Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti, 1986

Aliatii au reusit sa invinga in cel de-al doilea razboi mondial si datorita faptului ca au descifrat codurile folosite la criptarea comunicatiilor germane, ajutati si de faptul ca au intrat in posesia unei masini Enigma intacte, aflata pe un submarin german capturat - care nu a respectat procedurile de distrugere ale materialelor secrete (masinile Enigma erau folosite pentru a codifica / decodifica orice mesaj trimis intre unitati ale armatei germane).

Se presupune ca decriptarea comunicatiilor a grabit sfarsitul razboiului cu circa doi ani! Cate vieti au fost astfel salvate?

Ok, gata cu istoria, pentru cine vrea sa citeasca mai mult, exista internetul.

Iata o problema simpla...

Cati dintre voi vor reusi sa gaseasca cifrele ce alcatuiesc cifrul ascuns in aceasta pagina?
Nu se stie cate cifre are cifrul, dar iata instructiunile!
Este cel mai mic numar care impartit la 10 da rest 9, impartit la 9 da rest 8, impartit la 8 da rest 7, impartit la 7 da rest 6, impartit la 6 da rest 5, impartit la 5 da rest 4, impartit la 4 da rest 3, impartit la 3 da rest 2, impartit la 2 da rest 1. E sim-

Rezolvare
n=10a+9=9b+8=8c+7=…….=2i+1, de aici n=[5*7*8*9]-1
2519