Barem de corectare
Clasa a VII-a

Subiectul 1. Să se determine $x \in \mathbb{N}$ astfel ca $\dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{x}}{2\sqrt{2}-\sqrt{x}}$ să fie număr întreg.

Rezolvare:

$\dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{x}}{2\sqrt{2}-\sqrt{x}} = a,\ a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{2}{x}} = \dfrac{a+3}{2a-1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = 2p^2,\ p \in \mathbb{N}$ 3p

$a = \dfrac{3p+1}{2-p} = -3 + \dfrac{7}{2-p} \in \mathbb{Z}$ 1p

$p-2 \in \{-7,-1,1,7\} \Rightarrow p \in \{1,3,9\}$ 2p

Deci $x \in \{2,18,162\}$ 1p

Subiectul 2. Să se determine mulțimea:

$$A = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \exists p,q \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } \frac{36p^2+q^2}{4pq} = k \right\}.$$

Rezolvare:

Dacă $(p,q) = d \Rightarrow p = dm$ şi $q = dn$ cu $(m,n) = 1$ .... (1p)

$\Rightarrow \dfrac{36d^2m^2+d^2n^2}{4d^2mn} = k \Leftrightarrow \dfrac{36m^2+n^2}{4mn} = k \Leftrightarrow 36m^2+n^2 = 4kmn \Leftrightarrow$

$n^2 = m(4kn-36m) \Rightarrow m \mid n^2$

Dar $(m,n) = 1 \Rightarrow m = 1$ .... (2p)

Obținem $36+n^2 = 4kn \Leftrightarrow 36 = n(4k-n) \Rightarrow n \mid 36$

şi $n^2 = 4(kn-9) \Rightarrow n$ număr par

Atunci $n \in \{2,4,6,12,18,36\}$ ....(2p)

Dacă $n = 2 \Rightarrow k = 5 \in \mathbb{N}$

Dacă $n = 4 \Rightarrow k = \dfrac{52}{16} \notin \mathbb{N}$

Dacă $n = 6 \Rightarrow k = 3 \in \mathbb{N}$

Dacă $n = 12 \Rightarrow k = \dfrac{180}{48} \notin \mathbb{N}$

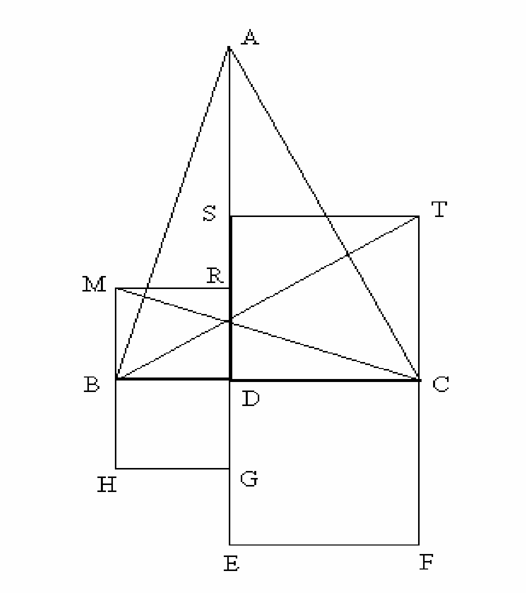
Dacă $n = 18 \Rightarrow k = 5 \in \mathbb{N}$

Dacă $n = 36 \Rightarrow k = \dfrac{37}{4} \notin \mathbb{N}$

Deci $A = \{3,5\}$ .... (2p)

Subiectul 3. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC şi $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, $AD = BC$ şi pătratele $CDEF$, $BDGH$ (dreapta BC separă A de E şi G). Să se arate că dreptele BF, CH şi AD sunt concurente.

Rezolvare:



Construim CDST, BDRM pătrate

$\Delta BCT \equiv \Delta ADC$ (cc)

=> $\sphericalangle TBC \equiv \sphericalangle DAC$

=> $BT \perp AC$ ………………… (2p)

Analog $CM \perp AB$ …………… (1p)

=> BT, AD şi CM concurente .....(2p) (înălţimile într-un triunghi sunt concurente)

=> BF, AD şi CH concurente (din motive de simetrie) .... (2p)

Subiectul 4. Fie $M_n = \{\Delta ABC \mid AB, BC \in \mathbb{N}^*, AC = n, n \in \mathbb{N}^* \text{ şi } AB = CD\}$, unde D este piciorul bisectoarei unghiului BAC.

a) Să se arate că $M_{2009} \neq \varnothing$;

b) Să se determine triunghiul din mulţimea M_{2009} care are perimetrul maxim;

c) Să se arate că $M_{2011} = \varnothing$.

Rezolvare:

a) Notăm $AB = x$. Deci $\frac{x}{2009} = \frac{BD}{x}$ (teorema bisectoarei) .... (2p)

$\frac{x+2009}{2009} = \frac{BC}{x}$, de unde $x(x+2009) = 2009BC$ (*)

Obţinem $41 \mid x$ şi $x = 41a$, $a \geq 1$ ....(1p)

Înlocuind în (*) se obţine $a \cdot 41(a+49) = 49BC$ (**), de unde $7 \mid a$

Deci $a = 7b$, $b \geq 1$ şi din (**) se obţine $41b(b+7) = BC$ ....(1p)

$AC = 41 \cdot 49$; $AB = 41 \cdot 7b$

Din inegalitatea triunghiulară obţinem $b \in \{3,4,5,6\}$

Deci $M_{2009} \neq \varnothing$. ....(1p)

b) Perimetrul maxim se obţine pentru $b = 6$ ....(1p)

c) Procedând analog cu inegalitatea triunghiulară se ajunge la o contradicţie

Deci $M_{2011} = \varnothing$ ....(1p)

Barem de corectare
Clasa a VIII-a

Subiectul 1. a) Să se arate că ecuația $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}=0$ are o infinitate de soluții întregi;

b) Să se arate că orice soluție a ecuației date este souție şi a ecuației $\frac{y}{x+y}+\frac{z}{y+z}+\frac{x}{z+x}=3$.

Rezolvare:

a) $x=0, y=-2z, z\in\mathbb{Z}^*$ este soluție .... (3p)

b)Dacă (x_0,y_0,z_0) este soluție a ecuației date => $\frac{x_0}{x_0+y_0}+\frac{y_0}{y_0+z_0}+\frac{z_0}{z_0+x_0}=0$

<=> $\frac{x_0+y_0-y_0}{x_0+y_0}+\frac{y_0+z_0-z_0}{y_0+z_0}+\frac{z_0+x_0-x_0}{z_0+x_0}=0$

<=> $1-\frac{y_0}{x_0+y_0}+1-\frac{z_0}{y_0+z_0}+1-\frac{x_0}{z_0+x_0}=0$ ....(2p)

<=> $\frac{y_0}{x_0+y_0}+\frac{z_0}{y_0+z_0}+\frac{x_0}{z_0+x_0}=3$

=> (x_0,y_0,z_0) este soluție a ecuației $\frac{y}{x+y}+\frac{z}{y+z}+\frac{x}{z+x}=3$ ....(2p)

Subiectul 2. a) Să se arate că numărul $x=3n\cdot 10^n-4^n+1$ se divide cu 9, oricare ar fi n număr natural;

b) Dacă $n\in\mathbb{N}$, să se determine partea întreagă a numărului $\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+3n+2}$.

Rezolvare:

a) $3n\cdot 10^n=3n(9+1)^n=M_9+3n$ ....(1p)

$3n\cdot 10^n-4^n+1=M_9-3(4^{n-1}+4^{n-2}+...+4+1-n)$ ....(2p)

4^k-1 se divide cu 3

Deci x se divide cu 9 ....(1p)

b) $n+\frac{2}{5}<\sqrt{n(n+1)}<n+\frac{1}{2}, \forall n\in\mathbb{N}^*$ ....(1p)

Deci $n-1+\frac{2}{5}<\sqrt{n(n-1)}<n-1+\frac{1}{2}$

$$n+\frac{2}{5}<\sqrt{n(n+1)}<n+\frac{1}{2}$$

$$n+1+\frac{2}{5}<\sqrt{(n+1)(n+2)}<n+1+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 3n+1+\frac{1}{5}<\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+3n+2}<3n+1+\frac{1}{2}$$

$\left[\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+3n+2}\right]=3n+1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ ....(1p)

$n=0 \Rightarrow \left[\sqrt{2}\right]=1,\ \ n=1 \Rightarrow \left[\sqrt{2}+\sqrt{6}\right]=3$ ....(1p)

Subiectul 3. Fie numerele naturale *a*, *b*, *c*, *n* astfel încât $a<b<c<n$ şi *n* număr prim. Arătaţi că numerele a^4, b^4, c^4 nu pot da acelaşi rest la împărţirea cu n^2.

Rezolvare:

Presupunem că a^4, b^4, c^4 dau acelaşi rest la împărţirea cu n^2

Dacă $a=0$ atunci $n\,|\,b$, fals. Deci $a\neq 0$ .... (1p)

$n^2\,|\,b^4-a^4$ şi $n^2\,|\,c^4-a^4$ ....(1p)

$n^2\,|\,b^4-a^4$ implică $n^2\,|\,(b^2+a^2)(b+a)(b-a)$ ....(1p)

$b-a<n$ implică $n\nmid b-a$. Deci $n^2\,|\,(b^2+a^2)(b+a)$ ....(1p)

Dacă $n\,|\,a+b$ şi $n\,|\,a^2+b^2$ atunci $n\,|\,(a+b)^2$ şi $n\,|\,(a+b)^2-a^2-b^2$ adică $n\,|\,2ab$, de unde $n\,|\,a$ sau $n\,|\,b$, fals ....(1p)

$n^2\nmid a+b$ pentru că $n^2>2n>a+b$

Dacă $n^2\,|\,a^2+b^2$ din $a<b<n$ rezultă $a^2+b^2=n^2$ ....(1p)

Analog se obţine $a^2+c^2=n^2$

Obţinem $b=c$ în contradicţie cu ipoteza ....(1p)

Subiectul 4. Pe planul pătratului *ABCD*, cu latura de 3, de aceeaşi parte a planului, în punctele *B*, *C* şi *D* se ridică perpendicularele $BB_1=2$, $CC_1=8$ şi $DD_1=4$.

a) Să se determine pe perpendiculara în *A* pe planul pătratului, punctul A_1, astfel încât punctele A_1, B_1, C_1 şi D_1 să fie coplanare;

b) Să se determine distanţa de la punctul O la intersecţia planelor (ABC) şi $(A_1B_1C_1)$, unde $\{O\}=AC\cap BD$.

Rezolvare:

a) Dacă A_1, B_1, C_1 şi D_1 ar fi în acelaşi semispaţiu faţă de planul pătratului, ar trebui să avem $\frac{DD_1 + BB_1}{2} = \frac{AA_1 + CC_1}{2}$ <=> $\frac{4+2}{2} = \frac{8 + AA_1}{2}$ <=> $AA_1 = -2$ ....(2p)

Deci, A_1 se află în semispaţiul opus în care se află punctele B_1, C_1 şi D_1 şi $AA_1 = 2$ ....(1p)

b) Fie OO_2 perpendiculara pe dreapta de intersecţie a planelor (ABC) şi $(A_1B_1C_1)$, $\{B_2\} = C_1B_1 \cap CB$ şi $\{D_2\} = C_1D_1 \cap CD$ =>

Din ΔCC_1B_2, $BB_2 = 1$ şi din ΔCC_1D_2, $DD_2 = 3$

=> $B_2D_2 = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$ ……………………………………………… (2p)

$$S_{OB_2D_2} = S_{CB_2D_2} - S_{COD_2} - S_{COB_2} \Rightarrow S_{OB_2D_2} = \frac{4 \cdot 6}{2} - \frac{6 \cdot \frac{3}{2}}{2} - \frac{4 \cdot \frac{3}{2}}{2} = 12 - \frac{9}{2} - 3 = \frac{9}{2}$$

$d(O, B_2D_2) = \frac{6}{\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$ ……………………………………………… (2p)

mate.info.ro

Concursul de matematică "UNIREA", Ediţia a X-a
Focşani, 29 ianuarie 2010

Clasa a IX-a

Subiectul 1. Fie a şi n numere naturale nenule, astfel încât $a < \sqrt{2n}$. Să se arate că numărul $\left[\frac{n^2}{a^2}\right]$ este pătrat perfect dacă şi numai dacă n se divide cu a.

Soluţie. Dacă $n = ak$, cu k natural, atunci $\left[\frac{n^2}{a^2}\right] = k^2$................(1p)

Reciproc, să presupunem că n nu se divide cu a. Fie $n = aq+r$, cu $0 < r < a$. Atunci

$$\frac{n^2}{a^2} = q^2 + \frac{2aqr + r^2}{a^2}.$$

Dar

$$2aqr + r^2 < 2a^2q + a^2,$$

deci

$$\frac{2aqr + r^2}{a^2} < 2q + 1.$$

.... (3p)

Pe de altă parte, dacă $2aqr+r^2 < a^2$, atunci $2aqr+r^2 < 2n-1 = 2aq+2r-1$, contradicţie, deci

$$\frac{2aqr + r^2}{a^2} \geq 1.$$

Deducem că

$$q^2 + 1 \leq \frac{n^2}{a^2} < (q+1)^2,$$

deci $\left[\frac{n^2}{a^2}\right]$ nu poate fi pătrat perfect.

.... (3p)

Subiectul 2. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea

$$f(x) + f(x+y) \in \mathbb{Q}, \qquad (*)$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $y > 0$. Să se arate că $f(x) \in \mathbb{Q}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Fie $y > 0$ şi funcţiile $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x) + f(x+y),$$
$$h(x) = f(x) + f(x+2y).$$

Din ipoteză rezultă că $g(x), h(x) \in \mathbb{Q}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Dar

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(g(x) + h(x) - g(x+y)\right),$$

deci $f(x) \in \mathbb{Q}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. .... (7p)

Subiectul 3. Fie ABC un triunghi. Pe laturile BC, CA şi AB considerăm punctele A', B' şi C' astfel încât segmentele AA', BB' şi CC' sunt concurente în punctul M.

a) Să se demonstreze relaţia lui *Van Aubel:*

$$\frac{AM}{MA'} = \frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B}.$$

b) Ştiind că

$$\frac{AM}{MA'} \cdot \frac{BM}{MB'} \cdot \frac{CM}{MC'} = 2010,$$

să se calculeze

$$\frac{AM}{MA'} + \frac{BM}{MB'} + \frac{CM}{MC'}.$$

Soluţie. a) Demonstraţia sintetică sau vectorială .... (3p)

b) Folosind a) şi teorema lui Ceva avem

$$\frac{AM}{MA'} \cdot \frac{BM}{MB'} \cdot \frac{CM}{MC'} = 2 + \frac{AM}{MA'} + \frac{BM}{MB'} + \frac{CM}{MC'}$$

.... (4p)

Subiectul 4. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC cu centrul de greutate G. Considerăm o dreaptă d care trece prin G şi intersectează segmentele (AB) şi (AC) în punctele M şi, respectiv, N. Fie O intersecţia segmentelor $[BN]$ şi $[CM]$. Arătaţi că expresia

$$2[AMN] + [BOC] - [MON]$$

este constantă, adică nu depinde de alegerea dreptei d. (Prin $[XYZ]$ am notat aria triunghiului XYZ).

Soluţie. Fie D mijlocul laturii BC şi A', B', C', D' proiecţiile punctelor A, B, C, D pe dreapta d. Atunci avem $AA' = 2DD' = BB' + CC'$, de unde

$$[AMN] = [BMN] + [CMN],$$

. . . . (3p)

de unde

$$\begin{aligned}
&2\,[AMN]+[BOC]-[MON]\\
&=[AMN]+[BMN]+[CMN]+[BOC]-[MON]\\
&=[ABC]\,.
\end{aligned}$$

. . . . (4p)

Concursul de matematică "UNIREA", Ediţia a X-a
Focşani, 29 ianuarie 2010

Clasa a X-a

Subiectul 1. Fie n un număr natural nenul. Se notează cu a_n numărul submulţimilor nevide ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ care nu conţin numere consecutive. Să se arate că

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 1,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie. O analiză simplă ne arată că $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$. Să considerăm cele a_{n+2} submulţimi ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, n+1, n+2\}$ care nu conţin numere consecutive. Submulţimile care conţin numărul $n+2$ nu conţin $n+1$, deci sunt submulţimi (incluzând submulţimea vidă) ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ care nu conţin numere consecutive, prin urmare numărul lor este $a_n + 1$. ...... (4p)

Submulţimile care nu conţin numărul $n+2$ sunt, evident, în număr de a_{n+1}. De aici concluzia. .... (3p)

Subiectul 2. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{C}^*$ afixele vârfurilor patrulaterului convex $ABCD$. Ştiind că
a) $a\overline{c} = \overline{a}c$, $b\overline{d} = \overline{b}d$;
b) $a + b + c + d = 0$,
arătaţi că $ABCD$ este paralelogram.

Soluţie. Condiţia $a\overline{c} = \overline{a}c$ se scrie

$$\frac{a}{c} = \overline{\left(\frac{a}{c}\right)},$$

deci $\frac{a}{c} \in \mathbb{R}$. Aceasta înseamnă că punctele A, C şi O (originea sistemului de axe) sunt coliniare. Similar, B, D, O sunt coliniare, deci O este intersecţia diagonalelor patrulaterului $ABCD$. .... (3p)

Dar atunci suma $\overline{OA} + \overline{OC}$ are direcţia diagonalei AC, iar suma $\overline{OB} + \overline{OD}$ direcţia diagonalei BD. Nu putem avea

$$\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OB} + \overline{OD} = 0$$

decât dacă $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD} = 0$. De aici rezultă că O e mijlocul fiecărei diagonale, deci $ABCD$ este paralelogram. .... (4p)

Subiectul 3. Funcţia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ verifică relaţia

$$f(x + y) + f(xy) = f(x) + f(y) + f(x) f(y), \qquad (*)$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$.
a) Arătaţi că $f(1) \in \{-1, 0, 1\}$.
b) Determinaţi toate funcţiile care verifică relaţia (*).

Soluţie. a) Pentru $x = y = 0$ obţinem $f(0) = 0$. Pentru $x = 1$, $y = -1$ obţinem

$$f(1)(1 + f(-1)) = 0,$$

deci $f(1) = 0$ sau $f(-1) = -1$. Să presupunem că $f(1) \neq 0$. Pentru $x = 2$, $y = -1$ rezultă

$$f(1) + f(-2) = -1,$$

iar pentru $x = -2$, $y = 1$

$$f(-2)(1 - f(1)) = 0.$$

Din ultimele două relaţii deducem

$$(1 + f(1))(1 - f(1)) = 0,$$

deci $f(1) = 1$ sau $f(1) = -1$.

b) Pentru $y = 1$, relaţia (*) devine

$$f(x+1) = f(1) + f(x) f(1),$$

pentru orice $x \in \mathbb{Z}$.

Cazul 1. Dacă $f(1) = -1$, relaţia se scrie

$$f(x+1) = -1 - f(x),$$

şi obţinem imediat prin inducţie că

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \text{ e par} \\ -1, & \text{dacă } x \text{ e impar} \end{cases}$$

Cazul 2. Dacă $f(1) = 0$, avem evident $f(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$.

Cazul 3. Dacă $f(1) = 1$, obţinem

$$f(x+1) = 1 + f(x),$$

şi deducem inductiv că $f(x) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$.

Toate cele trei soluţii verifică condiţia (*).

Subiectul 4. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi $k \in \mathbb{R}$, $0 < k < \frac{1}{2}$. Pe laturile BC, CA, AB se consideră punctele D, E, F, astfel încât $\overline{BD} = k\overline{BC}$, $\overline{CE} = k\overline{CA}$, $\overline{AF} = k\overline{AB}$. Să se stabilească dacă următoarele două condiţii sunt echivalente:

(1) Triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul DEF;

(2) Triunghiul ABC este echilateral.

mate.info.ro

Soluție sintetică: Cercurile circumscrise triunghiurilor *AFE*, *BDF*, *CED* au un punct comun *P* ....(2p)
Se constată $\sphericalangle BPC = \sphericalangle BAC + \sphericalangle EDF$ .... (1p)
Cu aceasta se explicitează condiția (1) prin: *P coincide cu centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC* ....(2p)
Se consideră şi mijloacele A', B', C' ale laturilor BC, CA, AB.
Acum conciclicitățile declarate revin la asemănările triunghiurilor dreptunghice *DOA*', *EOB*', *FOC*'.
Cum $OA' = R\cos A$, $2DA' = a(1-2k)$ …………………………………….(1p)
Aceste condiții revin prin $ctgA = ctgB = ctgC$ la: *triunghiul ABC este echilateral* ……………………………………………………………(1p)

Soluție cu numere complexe:
Fie a, b, ... afixele punctelor A, B, ...
Avem $d = kb + (1-k)c$, $e = kc + (1-k)a$, $f = ka + (1-k)b$
Condiția de asemănare a triunghiurilor ABC şi DEF este $\frac{a-b}{a-c} = \frac{d-e}{d-f}$ ...... (2p)
Efectuând calculele, obținem $(2k-1)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = 0$ ....(3p)
Concluzia ....(2p)

Soluţii şi barem – clasa a XI-a

1. a) Se verifică, folosind proprietăţile determinanţilor **3p**

b) Problema se reduce la faptul că determinantul Vandermonde $V(a_1, \ldots, a_n)$ este divizibil cu $1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot (n-1)!$ **2p**

Înlocuind, eventual, a_i cu $a_i + c$, $c > \min_{1 \le j \le}(-a_j)$, putem presupune $a_i > 0$. În acest caz, $V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1!\ 2! \ldots (n-1)! \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ C_{a_1}^1 & \ldots & C_{a_n}^1 \\ & \ldots & \\ C_{a_1}^{n-1} & \ldots & C_{a_n}^{n-1} \end{vmatrix}$ **2p**

2. a) Se verifică prin calcul direct **1p**

b) Se ştie că $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ şi că $\operatorname{tr}(AB)^2 = \operatorname{tr}(BA)^2$ **4p**

Din a), $\operatorname{tr}(AB) = a + d$ şi $\operatorname{tr}(AB)^2 = a^2 + d^2 + 2bc$ deducem concluzia **2p**

3. a) Rezultă imediat, cu lema *Stolz – Cesarò* **3p**

b) Din $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt[n]{k}}}{\ln n} \le \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln n} \to 1$ **1p**

şi $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt[n]{k}}}{\ln n} \ge \dfrac{\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln n} \to 1$ **2p**

rezultă că limita cerută este 1 .... **1p**

4. a) Din ipoteză reiese $|f(x)| \le |f(0)| + |g(x)| + |g(0)|$, deci f este mărginită pe o vecinătate V a lui ∞. Fie $h(x) = \sup_{t \ge x} f(t)$ pentru $x \in V$; h este descrescătoare şi mărginită, deci $\lim_{x\to\infty} h(x) = l \in \mathbb{R}$ **2p**

Arătăm că $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$. Într-adevăr, dacă $\lim_{x\to\infty} g(x) = L$ şi $\varepsilon > 0$, atunci pentru o vecinătate U a lui ∞ avem $|g(x) - L| < \frac{1}{3}\varepsilon$, deci $|g(x) - g(y)| < \frac{2}{3}\varepsilon$, de unde $|f(x) - l| \le \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$ **3p**

b) Nu; un exemplu este dat de $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$ **2p**

Soluţii şi barem – clasa a XII-a

1. a) Avem $x^3y^3 = xyxyxy$, deci $x^2y^2 = (yx)^2, \forall x, y \in G$ **1p**
Rezultă $x^4y^4 = (x^2)^2(y^2)^2 = (y^2x^2)^2 = (xy)^4$ **2p**
Obţinem astfel $x^3y^3 = (yx)^3$, de unde, conform ipotezei, $xy = yx$ **1p**

b) Din cele de mai sus şi din condiţia de morfism, $x^3y^3 = (yx)^3 = y^3x^3$; folosind ipoteza deducem $tz = zt, \forall t, z \in G$ **2p**

c) Un exemplu este grupul diedral D_4, grup în care $x^4 = x, \forall x \in D_4$ **2p**

2. Pentru $X \in G$ avem $XS = \sum_{A\in G} XA = \sum_{B\in G} B = S$, deoarece funcţia $A \mapsto XA$ este bijectivă; prin adunare, deducem $S^2 = kS$ **3p**
Rezultă $(S - kI_n)^2 = -kS + k^2I_n = -k(S - kI_n)$, de unde obţinem inductiv, $(S - kI_n)^p = (-k)^{p-1}(S - kI_n)$ **2p**
Pe de altă parte, dacă valorile proprii ale matricei S sunt $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, atunci valorile proprii ale matricei S^2 sunt $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$, de unde $\max|\lambda_i|^2 \le k \max|\lambda_i|$, deci $\max|\lambda_i| \le k$. Cum $t = nk = \sum \lambda_i$, reiese că $\lambda_i = k, \forall i$, deci polinomul caracteristic al matricei S este $(X - k)^n$. Deducem astfel că $(S - kI_n)^n = O_n = (-k)^{n-1}(S - kI_n)$, de unde concluzia **2p**

3. $\int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right) \mathrm{d}x = n \int_0^{\frac{1}{n}} f(y)\mathrm{d}y$ **2p**
Limita şirului dat conduce la $L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(y)\mathrm{d}y$ **1p**
Folosind l'Hôpital şi definiţia derivatei, $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{2x} = \dfrac{1}{2}f'(0)$ **4p**

4. $|F(x)| \le |F(0)| + |\int_0^x f(t)\mathrm{d}t| \le |F(0)| + \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t \le |F(0)| + \frac{\pi}{2}$ **2p**
Fie $g(x) = \sup\limits_{t\ge x} F(t)$; g este descrescătoare şi mărginită, deci există şi este finită limita $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = l$ **2p**
Arătăm că $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = l$. Într-adevăr, dacă $\varepsilon > 0$, atunci pentru o vecinătate U a lui ∞ avem $|\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}| < \frac{1}{3}\varepsilon$, deci $|F(x) - F(y)| \le |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| < \frac{2}{3}\varepsilon$, de unde $|F(x) - l| \le \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon, \forall x \in U$ **3p**