**CONCURSUL NAŢIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE DECLARATE VACANTE/ REZERVATE ÎN ÎNVĂŢĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR**
**14 IULIE 2010**

**Probă scrisă la MATEMATICĂ** **VARIANTA 2**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 4 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL I** **30 de puncte**

**1.** Spunem că o mulţime nevidă $A \subset \mathbb{N}$ are proprietatea $(p)$ dacă suma oricăror două elemente ale lui $A$, nu neapărat distincte, nu este în $A$.

5p **a)** Arătaţi că mulţimea $\{1,4,6\}$ are proprietatea $(p)$, iar mulţimea $\{1,3,6\}$ nu are proprietatea $(p)$.

4p **b)** Daţi un exemplu de mulţime inclusă în mulţimea $\{1,2,3,...,2010\}$ care are 1005 elemente şi care are proprietatea $(p)$.

3p **c)** Câte submulţimi nevide ale mulţimii $B = \{4,5,6,7,8\}$ au proprietatea $(p)$?

3p **d)** Arătaţi că dacă $A \subset \{1,2,3,...,2010\}$ are proprietatea $(p)$, atunci mulţimea $A$ are cel mult 1005 elemente.

**2.** În planul $\alpha$ se consideră punctele $O_1, O_2, ..., O_{100}$, oricare trei necoliniare şi mulţimea $M = \{O_1, O_2, ..., O_{100}\}$. Se notează cu $C_i$ cercul de centru $O_i$ şi rază 1, $C_i \subset \alpha$, $i \in \{1,2,3,...,100\}$. Se ştie că pentru orice $i, j, k \in \{1,2,3,...,100\}$, există o dreaptă care intersectează cercurile $C_i$, $C_j$ şi $C_k$.

5p **a)** Arătaţi că într-un triunghi $ABC$ cu $AB \le AC$, distanţa de la $B$ la $AC$ este mai mică sau egală decât distanţa de la $C$ la $AB$.

4p **b)** Determinaţi numărul triunghiurilor care au toate vârfurile în mulţimea $M$.

4p **c)** Arătaţi că triunghiul $O_1O_2O_3$ are o înălţime de lungime cel mult 2.

2p **d)** Pentru fiecare $i \in \{1,2,3,...,100\}$ se notează cu $D_i$ cercul de centru $O_i$ şi rază 2, $D_i \subset \alpha$. Arătaţi că există o dreaptă care intersectează toate cercurile $D_1, D_2, \dots, D_{100}$.

**SUBIECTUL al II-lea** **30 de puncte**

**1.** Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4p **a)** Arătaţi că $A^3 - 3A^2 + 3A - I_3 = 0$.

4p **b)** Calculaţi $A^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

**2.** Pe mulţimea $G = (0,+\infty) \setminus \{1\}$ se consideră legea de compoziţie $x \perp y = x^{\ln y}$.

4p **a)** Arătaţi că mulţimea $G$ împreună cu legea „$\perp$” este grup comutativ.

3p **b)** Arătaţi că grupul $(G,\perp)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

**3.** Se consideră funcţia $f:[0;+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$.

5p **a)** Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiei *f*.

4p **b)** Arătaţi că graficul funcţiei *f* nu are asimptote.

4p **c)** Demonstraţi că $x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x$, $\forall x > 0$.

2p **d)** Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)...\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

**SUBIECTUL al III-lea** **30 de puncte**

Realizați o comparație între metodele didactice expozitive (explicația, expunerea, descrierea) şi metodele de învățare prin cooperare (brainstorming-ul, tema/ proiectul în grup, mozaicul). În realizarea comparației veți prezenta: definiția celor două categorii de metode, clasificarea şi descrierea lor, avantajele şi dezavantajele acestora, cu exemple adecvate disciplinei de concurs.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE DECLARATE VACANTE/ REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR**
**14 IULIE 2010**

**Probă scrisă la MATEMATICĂ**

**VARIANTA 2**

**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

**SUBIECTUL I** **30 de puncte**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | **a)** $1+1=2;\ 1+4=5;\ 1+6=7;\ 4+4=8;\ 4+6=10;\ 6+6=12$, iar $\{1,4,6\}\cap\{2,5,7,8,10,12\}=\varnothing$<br>$3+3=6\in\{1,3,6\}$ | **3p**<br>**2p** |
| | **b)** $X=\{1006,1007,...,2010\}$. Dacă $x,y\in X$, atunci $x+y\geq 2012\notin X$<br>$X$ are 1005 elemente | **3p**<br>**1p** |
| | **c)** Fie $X\subset B,\ X\neq\varnothing$ care nu are proprietatea $(p)\Rightarrow\exists x,y\in X$ cu<br>$x+y\in X\Rightarrow 8\leq x+y\leq 8\Rightarrow x+y=8\Rightarrow x=y=4,$ deci $\{4,8\}\subset X$<br>Cum orice $X\subset B$ cu $\{4,8\}\subset X$ nu are proprietatea $(p)\Rightarrow$ numărul submulțimilor care nu au proprietatea $(p)$ este $2^3=8$<br>Cum $B$ are 31 de submulțimi nevide, rezultă că numărul cerut este 23 | **1p**<br><br>**1p**<br><br>**1p** |
| | **d)** Dacă $A=\{a_1,a_2,...,a_k\}$ cu $a_1<a_2<...<a_k$ are proprietatea $(p)$, notăm cu $X=\{a_2-a_1,a_3-a_1,...,a_k-a_1\}$.<br>Cum $1\leq a_2-a_1<a_3-a_1<...<a_k-a_1\leq 2010$, rezultă că $X\subset\{1,2,...,2010\}$ şi are $k-1$ elemente. Dacă $a_i-a_1=a_j\in A$ pentru un $i\in\{2,...,k\}$ şi un $j\in\{1,2,...,k\}$, atunci $a_i=a_1+a_j\in A$, fals, deci $X\cap A=\varnothing$. Cum $X\cup A\subset\{1,2,...,2010\}$, rezultă $k\leq 1005$ | **3p** |
| **2.** | **a)** $S_{ABC}=\dfrac{AB\cdot d(C,AB)}{2}=\dfrac{AC\cdot d(B,AC)}{2}$<br>Finalizare | **3p**<br>**2p** |
| | **b)** $C_{100}^3$ | **4p** |
| | **c)** Fie $d$ dreapta care taie cercurile $C_1$, $C_2$, $C_3$. Alegem un reper cartezian cu axa $Ox=d$ în care $O_1(x_1,y_1),\ O_2(x_2,y_2),\ O_3(x_3,y_3)$. Cum distanța de la $O_i$ la $d,\ i\in\{1,2,3\}$, este cel mult 1, rezultă că $\lvert y_i\rvert\leq 1,\ \forall i\in\{1,2,3\}$. Fără a restrânge generalitatea putem presupune $x_1\leq x_2\leq x_3$.<br>$\Delta=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=y_1(x_3-x_2)+y_2(x_1-x_3)+y_3(x_2-x_1)$. Obținem $\lvert\Delta\rvert\leq 2O_1O_3$<br>$h_{O_2}=\dfrac{2S}{O_1O_3}=\dfrac{\lvert\Delta\rvert}{O_1O_3}\leq 2$ | **1p**<br><br>**2p**<br>**1p** |
| | **d)** Alegem cea mai mare distanță $O_iO_j,\ i,j\in\{1,2,...,100\}$. Fie ea $O_1O_2$. Pentru fiecare $i\in\overline{3,100}$ avem $O_1O_i\leq O_1O_2,\ O_2O_i\leq O_1O_2$ rezultă că înălțimea din $O_i$ este cea mai mică înălțime a triunghiului $O_1O_2O_i$. Cum acest triunghi are o înălțime mai mică sau egală cu 2 rezultă că distanța de la $O_i$ la $O_1O_2$ este cel mult 2. Deci $O_1O_2$ intersectează $D_i,\ i\geq 3$. Cum $O_1O_2$ intersectează $D_1$ şi $D_2$ rezultă concluzia | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **30 de puncte**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | **a)** $A^2=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A^3=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$<br>Finalizare | **2p**<br>**2p** |
| | **b)** $A=I_3+B$, unde $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$<br>$B^k=O_3,\ \forall k\geq 3$<br>$A^n=(I_3+B)^n=C_n^0I_3+C_n^1B+C_n^2B^2+C_n^3B^3+...+C_n^nB^n=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$ | **1p**<br>**1p**<br>**2p** |
| **2.** | **a)** $(x\perp y)\perp z=\left(x^{\ln y}\right)^{\ln z}=x^{\ln y\cdot\ln z}$ şi $x\perp(y\perp z)=x\perp\left(y^{\ln z}\right)=x^{\ln y^{\ln z}}=x^{\ln y\cdot\ln z}$, deci legea „$\perp$” este asociatvă<br>$a$ este element neutru $\Leftrightarrow x\perp a=a\perp x=x,\ \forall x\in G\Leftrightarrow x^{\ln a}=a^{\ln x}=x,\ \forall x\in G\Leftrightarrow a=e\in G$<br>$x\perp x'=e\Rightarrow x^{\ln x'}=e\Rightarrow \ln x\cdot\ln x'=1\Rightarrow \ln x'=\frac{1}{\ln x}\Rightarrow x'=e^{\frac{1}{\ln x}}\in G$, deci orice element din $G$ este simetrizabil<br>$x\perp y=y\perp x\Leftrightarrow x^{\ln y}=y^{\ln x}\Leftrightarrow \ln y\cdot\ln x=\ln x\cdot\ln y$, adevărat, deci legea este comutativă | **1p**<br>**1p**<br>**1p**<br>**1p** |
| | **b)** Funcția $f:\mathbb{R}^*\to G,\ \ f(x)=e^x$ este bijectivă<br>$f(xy)=f(x)\perp f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}^*$ | **2p**<br>**1p** |
| **3.** | **a)** $f'(x)=\frac{1}{x+1}-1+x=\frac{x^2}{x+1},\ x\in[0,+\infty)$<br>Cum $f'(x)\geq 0,\ \forall x\in[0,+\infty)$ şi $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$, rezultă $f$ strict crescătoare pe $[0,+\infty)$<br>*f* are un unic punct de extrem, $x=0$ (punct de minim) | **2p**<br>**2p**<br>**1p** |
| | **b)** $f$ continuă pe $[0,+\infty)$, deci graficul lui *f* nu are asimptote verticale<br>$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$, deci graficul lui *f* nu are asimptote orizontale<br>$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$, deci graficul lui *f* nu are asimptote oblice | **2p**<br>**1p**<br>**1p** |
| | **c)** Din **a)** rezultă că $f(x)>f(0)=0,\ \forall x>0$, deci $x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x),\ \forall x>0$<br>Dacă $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}\ g(x)=\ln(1+x)-x$, atunci $g'(x)\leq 0$ şi $g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$, deci $g$ este strict descrescătoare pe $[0,+\infty)$<br>Rezultă că $g(x)<g(0)=0,\ \forall x>0$, adică $\ln(1+x)<x,\ \forall x>0$ | **1p**<br>**2p**<br>**1p** |
| | **d)** Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, însumăm inegalitățile de la **c)** pentru $x=\frac{k}{n^2},\ k=\overline{1,n}$ şi obținem<br>$\frac{n+1}{2n}-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}\leq\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\leq\frac{n+1}{2n},\ n\in\mathbb{N}^*$<br>$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$, deci $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)...\left(1+\frac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}=\sqrt{e}$ | **1p**<br><br>**1p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **30 de puncte**

| | |
|---|---|
| - definiția celor două categorii de metode | 6p. |
| - clasificarea celor două categorii de metode | 6p. |
| - descrierea celor două categorii de metode | 6p. |
| - prezentarea comparativă a avantajelor celor două categorii de metode, cu exemple adecvate disciplinei de concurs | 6p. |
| - prezentarea comparativă a dezavantajelor celor două categorii de metode, cu exemple adecvate disciplinei de concurs | 6p. |

**Notă:**

1. În situația în care candidatul prezintă avantajele, respectiv dezavantajele celor două categorii de metode fără a da exemple adecvate disciplinei de concurs se acordă câte 4 puncte din cele 6 puncte posibile.
2. Se punctează oricare modalitate corectă de răspuns: fie comparația între cele două categorii de metode, fie comparația între oricare două metode, câte una din fiecare categorie.