

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010

Proba E c)

Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 9

Теоретична філія, реальний профіль, спеціальність математика-інформатика.

Філія за покликанням, військовий профіль, спеціальність математика-інформатика.

- Всі завдання (I, II, III) є обов'язковими. Надаються 10 стартових балів.
- Повний час роботи 3 години.
- Для усіх завдань необхідні повні розв'язки.

ЗАВДАННЯ I (30 балів)

- 56 1. Обчисліть $\left((1-i)(i-1)\right)^4$.
- 56 2. Докажіть, що $f: (-3,3) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{3-x}{3+x}$ є непарною.
- 56 3. Визначте цілі корені нерівності $x^2 + 2x - 8 < 0$.
- 56 4. Скільки елементів з множини $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ діляться на 4 або на 5?
- 56 5. У системі координат xOy розглядають точки $M(1, -2)$, $N(-3, -1)$ і $P(-1, 2)$. Визначте координати точки Q так, щоб $MNPQ$ був паралелограмом.
- 56 6. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 6$, $AC = 3$ і $BC = 5$. Визначте довжину висоти $[AD]$.

ЗАВДАННЯ II (30 балів)

1. Дано систему
$$\begin{cases} x - 2y - 8z = -65 \\ 3x + y - 3z = 22 \\ x + y + z = 28 \end{cases}$$
 де $x, y, z \in \mathbb{R}$ і матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, яка асоційована системі.
- 56 а) Докажіть, що ранг матриці A дорівнює 2.
- 56 б) Розв'яжіть систему у $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- 56 в) Визначте число коренів системи у множині $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
2. Дано множину матриць $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.
- 56 а) Визначте число елементів множини A .
- 56 б) Докажіть, що існує ненульова матриця $M \in A$, така що $\begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$.
- 56 в) Розв'яжіть у множині A рівняння $X^2 = I_2$.

ЗАВДАННЯ III (30 балів)

1. Розглядають функцію $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg \frac{x}{x+1}$.
- 56 а) Для графіка функції f визначте рівняння асимптоти прямоючої до $+\infty$.
- 56 б) Дослідіть монотонність функції f .
- 56 в) Визначте точки вигину для функції f .
2. Дано послідовність $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_n^{n+1} \frac{2x-1}{x} dx$.
- 56 а) Докажіть, що послідовність $(I_n)_{n \geq 1}$ - строго зростаюча.
- 56 б) Докажіть, що послідовність $(I_n)_{n \geq 1}$ - обмежена.
- 56 в) Обчисліть $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(2 - I_n)$.