CLASA A VI-A

SOLUŢII ŞI BAREM DE CORECTARE

1. Fie $\frac{a}{b}$ cea mai mare fracţia ireductibilă pentru care $\frac{24}{11}:\frac{a}{b}=x$, $\frac{34}{13}:\frac{a}{b}=y$, $\frac{48}{7}:\frac{a}{b}=z$ cu $x,y,z\in\mathbb{N}^*$ 1p

   Din $(a,b)=1$ rezultă $a\,|\,24$, $a\,|\,34$, $a\,|\,48$ 1p

   Analog se deduce că $11\,|\,b$, $13\,|\,b$, $7\,|\,b$ 1p

   Pentru condiţia de maxim considerăm $a=(24,34,48)$; $b=[11,13,7]$ 2p

   Finalizare: $a=2$, $b=1001$ 1p

2. Există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel ca $\overline{abcd}=k\cdot\overline{ab}\cdot\overline{cd}$ 1p

   $100\cdot\overline{ab}+\overline{cd}=k\cdot\overline{ab}\cdot\overline{cd}$ 1p

   $100\cdot\overline{ab}=\overline{cd}\left(k\cdot\overline{ab}-1\right),\left(\overline{ab},k\cdot\overline{ab}-1\right)=1\Rightarrow\left(k\cdot\overline{ab}-1\right)|100$ 1p

   $k\cdot\overline{ab}-1\in\{10,20,25,50,100\}$ 1p

   $k\cdot\overline{ab}-1=25\Rightarrow\overline{ab}=13,\overline{cd}=52$ 1p

   $k\cdot\overline{ab}-1=50\Rightarrow\overline{ab}=17,\overline{cd}=34$ 1p

3. Mulţimea $\{p^n\,|\,n\in\mathbb{N}^*\}$ este infinită. Prin împărţirea la 1000 putem obţine 1000 de resturi şi anume $0,1,2,...,999$ 1p

   Există $m,k\in\mathbb{N}^*, m<k$ pentru care p^m şi p^k dau acelaşi rest la împărţirea la 1000 ...2p

   Deci $1000\,|\,p^m\left(p^{k-m}-1\right),\left(p^m,1000\right)=1$ 2p

   $1000\,|\,p^{k-m}-1$; Notăm $k-m=n$; Deci $1000t=p^n-1$ sau $p^n=1000t+1$ 1p

   Metoda 2

   Pentru $n=1000$, $a=p$ avem $(a,n)=1$. Cum $\varphi(1000)=400$ utilizând t.lui Euler „ $(a,n)=1\Rightarrow a^{\varphi(n)}\equiv1(\bmod n)$" rezultă că $p^{400}\equiv1(\bmod 1000)\Leftrightarrow1000\,|\,p^n-1$.

4. a) $\triangle BFA\equiv\triangle CEA(LUL)$ 1p

   b) Fie $\{K\}=BM\cap CN$; $MN=$ linie mijlocie în $\triangle AFE$; $m(\sphericalangle MNK)=m(\sphericalangle KMN)=60^\circ\Rightarrow\triangle KMN=$ echilateral 2p

   $\triangle KBC=$ echilateral; $LK=$ mediatoare a segmentului $[BC]$, $[AL]=$ mediatoare a segmentului $[BC]$, deci are loc concurenţa 2p

   c) $BM=CN=\frac{a}{2}; MN=\frac{3a}{2}\Rightarrow a=40$ cm 1p