100
2010
Anul Matematicii în
Școala Românească
www.anulmatematicii.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA PE MUNICIPIUL
BUCUREȘTI , 24.04.2010
CLASA a V-a

1. Să se demonstreze că numerele :
$E_n = 2^n \cdot 5^{3n} - 2^{4n} \cdot 5^n + 6^n \cdot 13^{2n} - 3^{3n} \cdot 13^n$ se divid cu 17 pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
(M.Cristea)

2. Se consideră mulțimile :
$A_1 = \{1,2\}, A_2 = \{3,4,5,6\}, A_3 = \{7,8,9,10,11,12\}, A_4 = \{13,14,15,16,17,18,19,20\},...$
   a) Observați o modalitate de formare a elementelor mulțimilor A_1, A_2, A_3, A_4 și scrieți elementele mulțimii A_{10}.
   b) Aflați cel mai mic $p \in \mathbb{N}^*$ pentru care suma elementelor mulțimii A_p este divizibilă cu 5.
(Victor Nicolae , Petre Simion)

3. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât :

$$\frac{2004}{2005} < \frac{n}{n+2} < \frac{2005}{2006}$$

(Gazeta Matematică)

4. Un număr $n \in \mathbb{N}^*$ se numește perfect dacă suma tuturor divizorilor săi naturali este egală cu $2n$.
   a) Să se verifice că numerele $6, 28, 496$ sunt perfecte (Pitagora)
   b) Să se arate că dacă $p \in \mathbb{N}^*$ este un număr prim astfel încât $2^p - 1$ este număr prim, atunci $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ este un număr perfect. (Elementele lui Euclid)

Notă
Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă note cuprinse între 1 și 7 pentru fiecare subiect. Timp efectiv de lucru : 2 ore.