MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ȘI SPORTULUI
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI IAȘI
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA – Filiala IAȘI

2010
Anul Matematicii în Școala Românească
100
www.anulmatematicii.ro

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa JUDEȚEANĂ
Iaşi, 24 aprilie 2010

CLASA A V-A - BAREM DE NOTARE

1. a) Determinaţi $n \in \mathbf{N}$ astfel încât numărul

$$A = 2^n \cdot 15^{n+1} \cdot 10^2 - 6^n \cdot 5^{n+2} \cdot 3^3 + 3^{n+1} \cdot 10^n \cdot 5^2$$

să se termine în 2010 zerouri.

b) Determinaţi numerele naturale a şi b, ştiind că

$$a^2 = 2069 + 2^b + a.$$

BAREM:

a) A= 30^{n+2} ……………………………………2p
n=2008 ……………………………………1p

b) $a^2 - a$ par ……………………………………1p
$b = 0$ ……………………………………1p
$a = 46$ ……………………………………2p

2. Vom spune că un număr este "interesant" dacă poate fi scris ca sumă de două numere naturale, nenule, compuse.

a) Arătaţi că numărul 10 este "interesant", iar numărul 11 nu este "interesant".

b) Determinaţi toate numerele "interesante".

BAREM:

a) 10=4+6 ……………………………………1p
11=1+10=2+9=3+8=4+7=5+6 ……………………………………1p

b) $n=2k,\ k \geq 4 \Rightarrow n=2(k-2)+4$,este număr interesant……………………………………2p
$n=2k+1,\ k \geq 6 \Rightarrow n=2(k-4)+9$, este număr interesant……………………………………2p
Verificare: 1,2,3,4,5,6,7,9 nu sunt interesante.
Mulţimea numerelor interesante este $\{8,10\} \cup \{n \in N \mid n \geq 12\}$……………………1p

3. Considerăm patru numere naturale a_1, a_2, a_3, a_4, care verifică, în acelaşi timp, următoarele condiţii:

1) $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < 20$ şi

2) $i \cdot j$ divide numărul $\left(a_i + a_j\right)$, oricare ar fi $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}, i \neq j$ (de exemplu, $1 \cdot 2 \left| \left(a_1 + a_2\right), 2 \cdot 3 \right| \left(a_2 + a_3\right)$ etc.).

a) Arătaţi că $12 \left| \left(a_2 - a_1\right) \right.$.

b) Determinaţi numerele a_1, a_2, a_3, a_4.

BAREM:

a) $3 | a_1 + a_3$ şi $6 | a_2 + a_3 \Rightarrow 3 | a_2 - a_1$ ……………………………………………1p

$4 | a_1 + a_4$ şi $8 | a_2 + a_4 \Rightarrow 4 | a_2 - a_1$ …………………………………………..1p

b) $a_2 = 12 + a_1$ ……………………………………………………….......1p

$a_3 = 16 + a_1$ …………………………………………………………...…1p

$a_4 = 18 + a_1$ ……………………………………………………….….…1p

$a_1 = 0$ nu convine………………………………………………………....1p

$a_1 = 1, a_2 = 13, a_3 = 17, a_4 = 19$ …………………………………………….…1p

4. a) Fie $a, b, n \in \mathbf{N}, a > b$, $n \neq 0$. Să se arate că:

1) dacă *a* şi *b* dau acelaşi rest la împărţirea cu *n*, atunci $a - b$ se divide cu *n*;

2) dacă $a - b$ se divide cu *n*, atunci *a* şi *b* dau acelaşi rest la împărţirea cu *n*.

b) Fie $a_1, a_2, ..., a_{2010}$ o rearanjare a numerelor 1, 2, ..., 2010. Să se arate că printre numerele $a_1 + 1, a_2 + 2, ..., a_{2010} + 2010$, există două a căror diferenţă se divide cu 2010.

BAREM:

a) ………………………………………………………………………………1p

b) ………………………………………………………………………………2p

c) Cazul în care există două numere care dau acelaşi rest la împărţirea prin 2010……………………………………………………………………….…1p

În caz contrar (resturi distincte două câte două) resturile sunt 0,1,2,…,2009 ………………………………………………………………….....1p

$\left(a_1 + 1\right) + \left(a_2 + 1\right) + ... + \left(a_{2010} + 2010\right) = M_{2010} + 2009 \cdot 1005 \neq M_{2010}$………..…1p

Dar $\left(a_1 + 1\right) + \left(a_2 + 1\right) + ... + \left(a_{2010} + 2010\right) = 2009 \cdot 2011 = M_{2010}$ ……………....1p