MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ȘI SPORTULUI
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI IAȘI
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA – Filiala IAȘI

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa JUDEȚEANĂ
Iaşi, 24 aprilie 2010

CLASA A VI-A - BAREM DE NOTARE

1. a) Fie a, b, c, d numere naturale nenule astfel încât fracţiile $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ să fie ireductibile, iar $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ să fie număr natural. Demonstraţi că $b=d$.

b) Determinaţi numerele naturale nenule x, y şi n, ştiind că $\frac{3}{x}+\frac{5}{y}=n$.

BAREM:

a) $\frac{a}{b}$ este ireductibilă dacă şi numai dacă $(a,b)=1$. Analog (c, d)=1........................**1p**

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=k\in\mathbb{N}$ **, prin urmare** $ad+bc=kbd$ **1p**

Avem că $ad\,\vdots\,d, kbd\,\vdots\,d$, deci $bc\,\vdots\,d$. Cum $(c,d)=1$, rezultă că $b\,\vdots\,d$ **1p**

Analog, $d\,\vdots\,b$ și atunci $b=d$. **1p**

b) Dacă cele două fracţii sunt ireductibile, atunci $x=y$ şi ecuaţia devine $\frac{8}{x}=n$, adică $nx=8$. Găsim soluţiile $(x,z,n)\in\{(1,1,8);(2,2,4);(4,4,2);(8,8,1)\}$. **1p**

Dacă una din cele două fracţii este reductibilă, fie $(5,y)\neq 1$. Atunci $y=5p, p\in\mathbb{N}^*$ şi deucem că $\frac{3}{x}+\frac{1}{p}=n$. Dacp $p=1$, rezultă că $x\in\{1,3\}$ şi mai găsim soluţiile $(x,y,n)\in\{(1,5,4);(3,5,2)\}$. Dacă $p\geq 2$, atunci $\frac{1}{p}\leq\frac{1}{2}$ şi în cazul în care $\frac{3}{x}<\frac{1}{2}$ (deci x>6), ecuaţia nu are soluţii. Dacă $x\in\{1,2,..,6\}$, prin verificări directe, găsim soluţii noi $(x,y,n)\in\{(2,10,2);(1,20,1);(6,10,1)\}$ **1p**

Analog, în cazul în care $(3,x)\neq 1$, obținem soluțiile noi

$(x,y,n)\in\{(3,1,6);(6,2,3);(9,3,2)\}$ **1p**

Soluție alternativă

Cum $x\geq 1, y\geq 1$**,** rezultă că $n\leq \frac{3}{1}+\frac{5}{1}=8$ **1p**

Rezolvând în numere naturale cele opt ecuații $\frac{3}{x}+\frac{5}{y}=n, n\in\{1,2,..,8\}$**,** găsim soluțiile de mai sus **2p**

2. Se consideră şirul de numere naturale

$$a_1=2^1-1, a_2=2^2-1, a_3=2^3-1, \dots, a_n=2^n-1, \dots .$$

a) Găsiţi patru termeni ai şirului astfel încât primul să aibă exact doi divizori, al doilea să aibă exact patru divizori, al treilea exact şase divizori, iar al patrulea, exact opt divizori.

b) Demonstraţi că a_n este pătrat perfect dacă şi numai dacă $n=1$.

c) Există termeni ai şirului care să aibă exact nouă divizori? Justificaţi răspunsul!

BAREM:

a) $a_2=3$ are doi divizori; $a_4=15$ are patru divizori; $a_6=63$ are şase divizori, iar $a_8=255$ are opt divizori **2p**

b) Dacă $n=1$, atunci $a_1=1$ este pătrat perfect **1p**

Dacă $n\geq 2$, atunci $a_n=M_4-1$, deci a_n dă restul 3 la împărţirea prin 4 şi un astfel de număr nu poate fi pătrat perfect. **2p**

(În cazul în care se arată că a_n, $n\geq 2$, nu este pătrat perfect pentru numere de forma M_4+2, M_4+3, cu argumente de tipul ultima cifră, se va acorda ....**1p**)

c) Niciun număr care nu este pătrat perfect nu poate avea număr impar de divizori, iar 1 are un singur divizor, deci răspunsul la întrebare este negativ. **2p**

3. a) Completaţi cu numere naturale cele nouă căsuţe ale unui pătrat 3×3, astfel încât suma tuturor numerelor să fie pară, însă suma numerelor din orice pătrat 2×2 să fie impară.

b) Demonstraţi că oricare ar fi numărul natural n cel puţin egal cu 6, nu putem completa cele n^2 căsuţe ale unui pătrat $n\times n$ cu numere naturale astfel încât suma numerelor din orice pătrat 3×3 inclus în pătratul mare să fie pară, în timp ce suma numerelor din orice pătrat 2×2 inclus în cel mare să fie impară.

BAREM:

a) De exemplu:

1	1	1
1	0	1
1	1	1

....**3p**

b) Dacă $n=6$, împărţim pătratul mare în nouă pătrate disjuncte 2×2; dacă suma numerelor din fiecare astfel de pătrat ar fi impară, suma numerelor din întregul pătrat mare ar fi impară. Împărţim apoi pătratul mare în patru pătrate disjuncte 3×3; dacă suma numerelor din fiecare asemenea pătrat ar fi pară, suma numerelor din pătratul mare ar fi pară şi astfel se ajunge la o contradicţie **2p**

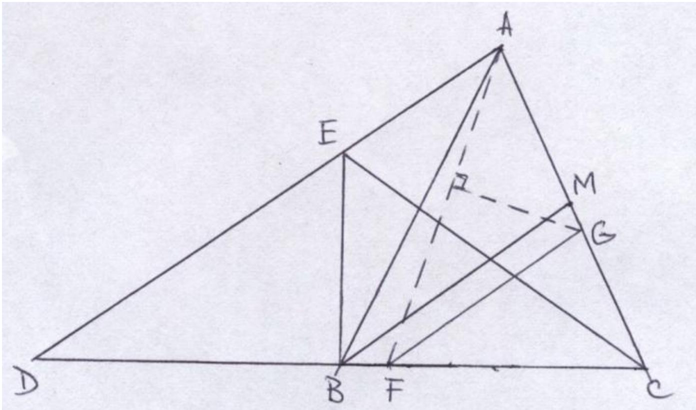
Orice pătrat $n\times n,\ n\geq 6,$ conţine un pătrat 6×6 şi contradicţia obţinută anterior în cadrul acestui pătrat rezolvă problema. **2p**

4. Se consideră triunghiul isoscel ΔABC cu $AB=AC$. Se alege punctul *D* astfel încât *B* este mijlocul segmentului $[CD]$. Mediatoarea segmentului $[CD]$ intersectează dreapta *AD* în *E*, iar bisectoarea unghiului $\angle DAC$ intersectează dreapta BC în *F*.

a) Arătaţi că $\angle DAB\equiv\angle ACE$.

b) Notăm cu *M* mijlocul segmentului $[AC]$ şi cu *G* intersecţia dintre dreapta AC şi mediatoarea segmentului $[AF]$. Demonstraţi că $FG\parallel BM$.

BAREM:



a) Cum *EB* este mediatoarea lui $[DC]$, atunci $\angle EDC\equiv\angle ECD$. Apoi, întrucât triunghiul *ABC* este isoscel, $\angle ABC\equiv\angle ACB$. **1p**

Avem că $m(\angle ACE)=m(\angle ACB)-m(\angle ECD)=m(\angle ABC)-m(\angle ADB)$. **1p**

Însă $\angle ABC$ este unghi exterior triunghiului *ABD*, deci $m(\angle ABC)=m(\angle ADB)+$ $+m(\angle DAB)$ şi concluzia se impune **1p**

b) *BM* este linie mijlocie în triunghiul *ACD*, deci $BM\parallel AD$. **1p**

Cum *G* se află pe mediatoarea lui $[AF]$, rezultă că $\angle AFG\equiv\angle FAG$. **1p**

Deducem că $\angle AFG\equiv\angle FAD$, prin urmare $FG\parallel AD$. **1p**

Concluzionăm că $FG\parallel BM$. **1p**