Concursul Național de Matematică "Arhimede"

Ediția a VII-a, Etapa finală 17 aprilie 2010

Clasa a III-a

I.(4p) a) Completați căsuțele libere cu operațiile matematice învățate pentru a obține rezultatele date (se pot folosi și paranteze):

$$5 \square 4 \square 3 \square 2 \square 1 = 0$$

$$5 \square 4 \square 3 \square 2 \square 1 = 1$$

$$5 \square 4 \square 3 \square 2 \square 1 = 2$$

$$5 \square 4 \square 3 \square 2 \square 1 = 3$$

(2p) b) Câți termeni are suma: $1 + 2 + 3 + \cdots$ dacă este un număr format din 2 cifre identice?

(3p) c) Într-o adunare de 2 numere, numărul mai mare este cu 27 mai mic decât suma numerelor și cu 13 mai mare decât numărul mai mic. Care este suma numerelor?

II.(4p) a) Dacă impart un număr la 5, rezultatul obținut va fi cu 32 mai mic decât numărul dat. Care este numărul?

(5p) b) Am 3 numere. Dacă îl impart pe al doilea la primul obțin câtul 3 rest 6. Dacă îl impart pe al treilea la primul, obțin câtul 5 rest 2. Aflați cele 3 numere, știind că diferența dintre ultimele 2 numere este 14.

III.(4p) a) În Poiana Viselor sunt cai înaripați, păuni și lebede. Știind că în total au 53 capete și 140 de picioare, iar numărul păunilor este de 3 ori mai mic decât al lebedelor, aflați câți cai înaripați, câți păuni și câte lebede sunt?

(5p) b) Câte numere de trei cifre, cel puțin egale cu 400, au produsul cifrelor egal cu zero?

IV.(4p) a) Cinci echipe de volei joacă un minicampionat. Fiecare echipă joacă cu fiecare din celelalte echipe o singură dată. La victorie se acordă 3 puncte, la meci egal câte un punct (la fiecare echipă), iar la înfrângere 0 puncte. Punctele realizate de fiecare echipă au fost: 2 ; 3; 4; 7; 10 puncte. Câte meciuri s-au încheiat cu scor egal? Justificați !

(5p) b) Într-o clasă sunt 19 bănci (de câte 2 locuri).
Elevii clasei formează, pentru ora de sport, echipe constituite fiecare din 3 fete și un băiat. În prima zi de școală au fost prezenți 33 copii. Câți elevi are clasa?

Notă: Toate problemele sunt obligatorii. Fiecare problemă primește un punct din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore.

Concursul Național de Matematică "Arhimede"

Ediția a VII-a, Etapa finală 17 aprilie 2010

Clasa a IV-a

I.(4p) a) Din treimea numărului A scădeți împătritul lui B, dacă: A este cel mai mare număr natural de 4 cifre distincte cu produsul cifrelor egal cu 36. B este răsturnatul celui mai mic număr impar de 3 cifre distincte.

(5p) b) Fie suma:

$$S = 6 + 7 + 8 + 9 + \cdots + 32 + 33 + 34$$

În locul unui semn " + " se pune semnul " – " şi se obține suma 538. Înaintea cărui număr a fost înlocuit semnul " + "?

II. Fie numărul

$$x = 333435 \ldots 147148149$$

(3p) a) Câte cifre se folosesc pentru scrierea numărului?

(3p) b) Câte cifre de 0 şi câte cifre de 1 conține numărul x?

(3p) c) Eliminați 190 de cifre din numărul x astfel încât numărul rămas să fie cât mai mare posibil. Ce număr ați obținut?

III.(4p) a) Câtul a 2 numere a şi b este 7 iar restul 0. Micşorăm primul număr a cu 84 şi îl înjumătățim pe b. Împărțind noile numere obținute, primul la al doilea , vom avea câtul 7 şi restul 0. Aflați numerele a şi b.

(5p) b) Ana are de 3 ori mai mulți ani decât avea Ion, când Ana avea vârsta pe care o are Ion acum. Când Ion va avea vârsta pe care o are Ana acum, vor avea împreună 35 de ani. Câți ani are fiecare acum?

IV.(9p) Un negustor arab lasă moştenire celor 3 fii ai săi un număr de cămile. Ei le impart astfel: primul ia o treime din numărul total de cămile, al doilea o treime din rest, al treilea o treime din noul rest, iar ultimul rest îl impart în 3 părți egale. Aflați câte cămile a primit fiecare fiu ştiind că numărul total al cămilelor nu depăşeşte 200. Găsiți cele 2 soluții.

Notă: Toate problemele sunt obligatorii. Fiecare problemă primeşte un punct din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore.

Concursul Național de Matematică "Arhimede"

Ediția a VII-a, Etapa finală 17 aprilie 2010

Clasa a V-a

I.Fie mulțimea $A = \{4, 9, 14, 19, 24, \dots\}$ cu elementele în ordine crescătoare și $card\ A = 2009$.

(5p) a) Este 2009 element al mulțimii A? Dacă da, pe ce poziție se găsește 2009 în mulțimea A ?

(4p) b) Dacă m_a este media aritmetică a numerelor 2009, a primului element din mulțimea A și a celui de-al

2009-lea element din mulțimea A, arătați că :

$$4010 < m_a < 4020 .$$

Prof. Ion Burcă

II. Se consideră numărul $A = 15^{6n+2}$, $n \in \mathbb{N}$.

(5p) a) Să se arate că numărul A este suma a cinci cuburi perfecte, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

(4p) b) Să se arate că numărul A nu poate avea 2010^{2011}divizori, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Prof. Aurel Doboșan, Lugoj

III.(5p) a) Reconstituiți înmulțirea:

$$\overline{ab} \cdot \overline{cdb} = \overline{bbbbb}$$

în sistemul zecimal.

Prof. Aurel Doboșan, Lugoj

(4p) b) Să se arate că există o infinitate de triplete de numere naturale nenule (a, b, c) astfel încât

$$a^9 = b^8 + c^{10}.$$

Niculaie Marin Goșoniu

IV. (9p) Să se determine cel mai mic număr natural n în baza 10, dacă n și $n + 3$ au ambele suma cifrelor

numere divizibile cu 7.

Prof. Dan Popescu, Suceava

Notă: Toate problemele sunt obligatorii. Fiecare problemă primește un punct din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore și 30 minute.

Concursul Național de Matematică “Arhimede”

Ediția a VII-a, Etapa finală 17 aprilie 2010

Clasa a VI-a

I.(4p) a) Să se determine numărul $a \cdot b \cdot c \cdot \overline{de}$, ştiind că $\frac{a}{2} = \frac{3}{b} = \frac{a+b}{c} = \frac{\overline{de}}{67}$.

(5p) b) Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{a^3+b^3}{c^2} = \frac{b^3+c^3}{a^2} = \frac{c^3+a^3}{b^2}$ să se calculeze $\frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3}$.

II.(4p)a) În triunghiul ABC, bisectoarea unghiului C intersectează pe (AB) în D și înălțimea din A pe BC în E, unde $E \in (CD)$. Dacă $(AE) \equiv (AD)$, să se afle măsura $\sphericalangle BAC$.

(5p)b) În triunghiul ABC, $M \in (AB), N \in [AC$, astfel încât $C \in (AN)$ și $MN \cap BC = \{P\}$. Dacă $[BM] \equiv [CN]$ și $[MP] \equiv [PN]$ demonstrați că $\Delta\, ABC$ este isoscel.

Prof. Albu Vasile, Dej

III. Fie ABC un triunghi echilateral, $M \in [AB,\ N \in [BC, P \in [CA$ astfel încât $(AM) \equiv (BN) \equiv (CP)$.

Demonstrați că:

(4p) a) triunghiul MNP este echilateral.

(5p) b) înălțimile triunghiurilor ABC și MNP sunt concurente.

Prof. Petre Simion, Bucureşti

IV. (4p) a) Suma unui număr impar, mai mare sau egal cu 3, de divizori ai numărului 9 900 este un număr par. Determinați valoarea maximă a acestei sume.

(5p) b) Aceeaşi problemă dacă termenii sumei sunt distincți doi câte doi.

Gabriel Popa, Iaşi

Notă: Toate problemele sunt obligatorii. Fiecare problemă primeşte un punct din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore şi 30 minute.

Concursul Naţional de Matematică "Arhimede"

Ediţia a VII-a, Etapa finală 17 aprilie 2010

Clasa a VII-a

I.(4p) a) Să se arate că $n^2 - 9n + 20 \geq 0$, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$.

(5p) b) Arătaţi că dacă numerele raţionale n şi p îndeplinesc simultan condiţiile

$n + p > 9$ şi $np - 5n - 4p + 20 > 0$, atunci $n > 4$.

Ion Burcă, Slatina

(revista Arhimede)

II. Din punctul M de pe baza BC a unui triunghi isoscel ABC, paralelele duse la laturile congruente taie pe AB în P şi pe AC în Q.

(3p) 1) Să se arate că mijlocul lui $[PQ]$ se află pe linia mijlocie $[EF]$, unde $E \in (AB)$ şi $F \in (AC)$.

(6p) 2) Dacă dreapta PQ taie dreapta BC în N, să se arate că

$$NB + NC \geq 2MN.$$

Mihail Bencze, Braşov

III. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi şi relaţia:

$$\max\left(\frac{bc}{-a+b+c}, \frac{ca}{a-b+c}, \frac{ab}{a+b-c}\right) = \frac{a+b+c}{2} \qquad (*)$$

(4p) 1) Arătaţi că dacă are loc relaţia $(*)$ atunci triunghiul ABC este dreptunghic.

(5p) 2) Reciproc, dacă triunghiul este dreptunghic atunci are loc relaţia $(*)$.

Gh. Stoica, Petroşani

IV. (9p) Numim domino colorat un dreptunghi 1×2 în care cele două pătrate sunt colorate în două culori diferite. Colorăm dominourile cu ajutorul a trei culori diferite.
Demonstraţi că este posibil să partiţionăm un pătrat de dimensiuni 2010×2010 în dominouri în 3 culori astfel încât numărul de dominouri colorate la fel să fie acelaşi şi nici un domino orizontal să nu fie adiacent cu un domino vertical colorate identic. (Două dominouri se numesc adiacente dacă au cel puţin două puncte comune.)

Adrian Zahariuc

<u>Notă</u>: Toate problemele sunt obligatorii. Fiecare problemă primeşte un punct din oficiu.
Timp de lucru: 3 ore.

Concursul Naţional de Matematică "Arhimede"

Ediţia a VII-a, Etapa finală 17 aprilie 2010

Clasa a VIII-a

I.(3p) a) Demonstraţi că:

$$k^2-(k+1)^2-(k+2)^2+(k+3)^2=4,\forall k\in\mathbb{N}.$$

(6p) b) Calculaţi:

$$1^2-2^2-3^2+4^2+5^2-6^2-7^2+8^2+\cdots+2008^2+2009^2-2010^2.$$

II.(9p) Fie p şi q două numere naturale nenule. Să se arate că

$$\mathbb{Z}=\{mp+nq\mid m,n\in\mathbb{Z}\}$$

dacă şi numai dacă p şi q sunt prime între ele.

Prof. Nicolae Papacu, Slobozia

III. (4p) a) Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{x^2}{x+y}\geq\frac{3x-y}{4},\quad\forall x,y\in(0,\infty).$$

(5p) b) Un paralelipiped dreptunghic de dimensiuni a,b,c are diagonala de lungime d. Să se demonstreze că:

$$\frac{a^3}{a+b}+\frac{b^3}{b+c}+\frac{c^3}{c+a}\geq\frac{d^2}{2}.$$

Prof.D.M. Bătineţu-Giurgiu

IV.(9p) Fie $a,b,c\in(0,\infty)$ şi $x,y,z\in\mathbb{R}$ astfel încât $cy+bz=a$, $cx+az=b$ şi $bx+ay=c$. Să se arate că a,b,c reprezintă lungimile laturilor unui triunghi dacă şi numai dacă $x,y,z\in(-1,1)$.

Prof. Gh.Stoica, Petroşani

Notă: Toate problemele sunt obligatorii. Fiecare problemă primeşte un punct din oficiu.
Timp de lucru: 3 ore.