Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 13 Martie 2010

CLASA a VIII-a

Problema 1.

(i) Arătaţi că nu putem pune în vârfurile unui cub 8 numere distincte din mulţimea $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 11, 12\}$ astfel încât suma numerelor din oricare două vârfuri unite printr-o muchie a cubului să fie divizibilă cu 2.

(ii) Arătaţi că putem pune în vârfurile unui cub 8 numere distincte din mulţimea $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 11, 12\}$ astfel încât suma numerelor din oricare două vârfuri unite printr-o muchie a cubului să fie divizibilă cu 3.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie x, y două numere naturale nenule diferite. Arătaţi că numărul $\dfrac{(x+y)^2}{x^3 + xy^2 - x^2y - y^3}$ nu este întreg.

Problema 3. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Bisectoarele unghiurilor $\angle A'C'A$ şi $\angle A'AC'$ intersectează AA' şi $A'C'$ în punctele P, respectiv S. Punctul M este piciorul perpendicularei din A' pe $C'P$ iar N este piciorul perpendicularei din A' pe AS. Punctul O este centrul feţei $ABB'A'$.

(i) Demonstraţi că planele (MNO) şi $(AC'B)$ sunt paralele.

(ii) Calculaţi distanţa dintre planele (MNO) şi $(AC'B)$ ştiind că $AB = 1$.

Problema 4. Determinaţi perechile de numerele naturale (a, b) care verifică egalitatea $a + 2b - b^2 = \sqrt{2a + a^2 + |2a + 1 - 2b|}$.

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 13 Martie 2010

CLASA A VIII-A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1.

(i) Arătaţi că nu putem pune în vârfurile unui cub 8 numere distincte din mulţimea $\{0,1,2,3,\ldots,11,12\}$ astfel încât suma numerelor din oricare două vârfuri unite printr-o muchie a cubului să fie divizibilă cu 2.

(ii) Arătaţi că putem pune în vârfurile unui cub 8 numere distincte din mulţimea $\{0,1,2,3,\ldots,11,12\}$ astfel încât suma numerelor din oricare două vârfuri unite printr-o muchie a cubului să fie divizibilă cu 3.

Gazeta Matematică

Soluţie.
(i) Dacă într-un vârf scriem un număr din mulţimea dată, atunci în cele trei vârfuri adiacente trebuie să scriem numere de aceeaşi paritate.
....**2 puncte**
Rezultă că în toate cele opt vârfuri trebuie scrise numere de aceeaşi paritate.
....**1 punct**
Cum în mulţimea dată sunt 7 numere pare şi 6 impare, cerinţa ca suma numerelor din oricare două vârfuri unite printr-o muchie a cubului să fie divizibilă cu 2 nu poate fi îndeplinită.
....**1 punct**
(ii) Sunt 8 numere în mulţimea dată care nu se divid la 3, anume 1, 4, 7, 10, (care dau restul 1, şi) 2, 5, 8, 11 (care dau restul 2).
....**1 punct**
În vârfuri ce nu sunt capete ale unei muchii scriem numere cu resturi egale la împărţirea cu 3.
....**1 punct**
Un exemplu: vârfurilor cubului $ABCDA'B'C'D'$ le asociem numerele 1, 2, 4, 5, 8, 7, 11, respectiv 10.
....**1 punct**

Problema 2. Fie x, y două numere naturale nenule diferite. Arătaţi că numărul $\dfrac{(x+y)^2}{x^3+xy^2-x^2y-y^3}$ nu este întreg.

Soluţie. Avem $\dfrac{(x+y)^2}{x^3+xy^2-x^2y-y^3}=\dfrac{(x+y)^2}{(x-y)(x^2+y^2)}$.
....**1 punct**

Presupunem că numărul $\dfrac{(x+y)^2}{(x-y)(x^2+y^2)}$ este întreg. Atunci şi numărul $\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ este întreg.

....**2 puncte**

Avem $\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = 1 + \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, deci $\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ este număr întreg.

....**2 puncte**

Însă $x^2+y^2 > 2xy$, echivalent cu $(x-y)^2 > 0$, deoarece $x \neq y$.

....**1 punct**

Rezultă $0 < \dfrac{2xy}{x^2+y^2} < 1$, contradicţie.

....**1 punct**

Problema 3. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Bisectoarele unghiurilor $\angle A'C'A$ şi $\angle A'AC'$ intersectează AA' şi $A'C'$ în punctele P, respectiv S. Punctul M este piciorul perpendicularei din A' pe $C'P$ iar N este piciorul perpendicularei din A' pe AS. Punctul O este centrul feţei $ABB'A'$.

(i) Demonstraţi că planele (MNO) şi $(AC'B)$ sunt paralele.

(ii) Calculaţi distanţa dintre planele (MNO) şi $(AC'B)$ ştiind că $AB = 1$.

Soluţie.

(i) Notăm cu T şi R intersecţiile dreptei AC' cu $A'M$ şi $A'N$ respectiv. În triunghiul $A'C'T$, $C'M$ este bisectoare şi înălţime, deci $A'M = MT$.

....**1 punct**

În triunghiul $A'AR$, AN este bisectoare şi înălţime, deci $A'N = NR$.

....**1 punct**

Segmentul MO este linie mijlocie în triunghiul $A'TB$, deci $MO \parallel TB$, iar segmentul NO este linie mijlocie în triunghiul $A'RB$, de unde $NO \parallel RB$. Cum $(TRB) = (AC'B)$, rezultă cerinţa.

....**2 puncte**

(ii) Distanţa dintre cele două plane este egală cu distanţa de la O la planul $(AC'B)$.

....**1 punct**

Distanţa de la O la planul $(AC'B)$ este egală cu jumătatea distanţei de la punctul A' la plan.

....**1 punct**

Distanţa de la A' la plan este jumătate din $A'D$, adică $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, deci distanţa dintre plane este $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

....**1 punct**

Problema 4. Determinaţi perechile de numerele naturale (a, b) care verifică egalitatea $a + 2b - b^2 = \sqrt{2a + a^2 + |2a + 1 - 2b|}$.

Soluţie. Deoarece $2a+1$ şi $2b$ sunt numere de parităţi diferite, avem că $|2a+1-2b| \neq 0$, deci $|2a+1-2b| \geq 1$.

.... **1 punct**

Rezultă că $\sqrt{2a+a^2+|2a+1-2b|} \geq \sqrt{2a+a^2+1} = a+1$.

.... **1 punct**

Pe de altă parte, avem $a+2b-b^2 = a+1-(b-1)^2 \leq a+1$.

.... **2 puncte**

Egalitatea din enunţ este posibilă dacă şi numai dacă $a+2b-b^2 = a+1 = \sqrt{2a+a^2+|2a+1-2b|}$. Din prima egalitate obţinem $b=1$,

.... **1 punct**

iar din a doua egalitate obţinem $|2a+1-2b| = 1$. De aici $1 = |2a-1|$, adică $a=0$ sau $a=1$. Perechile (a,b) căutate sunt deci $(0,1)$ şi $(1,1)$.

.... **2 puncte**