Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 13 Martie 2010

CLASA a IX-a

Problema 1. O dreaptă care trece prin centrul I al cercului înscris unui triunghi ABC taie laturile AB şi AC în P, respectiv Q. Notăm $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ şi $\dfrac{PB}{PA} = p$, $\dfrac{QC}{QA} = q$.

(i) Arătaţi că $a(1+p)\overrightarrow{IP} = (a - pb)\overrightarrow{IB} - cp\overrightarrow{IC}$.

(ii) Arătaţi că $a = bp + cq$.

(iii) Arătaţi că dacă $a^2 = 4bcpq$, atunci dreptele AI, BQ şi CP sunt concurente.

Problema 2. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ dat prin $x_n = 2^n - n$, $n \in \mathbb{N}$. Determinaţi toate numerele naturale p pentru care

$$s_p = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_p$$

este o putere cu exponent natural a lui 2.

Gazeta Matematică

Problema 3. Fie x un număr real. Arătaţi că x este număr întreg dacă şi numai dacă relaţia

$$[x] + [2x] + [3x] + \cdots + [nx] = \frac{n\left([x] + [nx]\right)}{2}$$

are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a.

Problema 4. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ cu proprietatea

$$f(n) + f(n+1) + f(f(n)) = 3n + 1, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 13 Martie 2010

CLASA A IX-A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. O dreaptă care trece prin centrul I al cercului înscris unui triunghi ABC taie laturile AB şi AC în P, respectiv Q. Notăm $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ şi $\dfrac{PB}{PA} = p$, $\dfrac{QC}{QA} = q$.

(i) Arătaţi că $a(1+p)\overrightarrow{IP} = (a-pb)\overrightarrow{IB} - cp\overrightarrow{IC}$.

(ii) Arătaţi că $a = bp + cq$.

(iii) Arătaţi că dacă $a^2 = 4bcpq$, atunci dreptele AI, BQ şi CP sunt concurente.

Soluţie.

(i) Avem $(p+1)\overrightarrow{IP} = \overrightarrow{IB} + p\overrightarrow{IA}$ şi $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$, de unde rezultă concluzia .... **3 puncte**

(ii) Analog cu **(i)**, $a(1+q)\overrightarrow{IQ} = (a-cq)\overrightarrow{IC} - bq\overrightarrow{IB}$. Cum punctele P, I, Q sunt coliniare, reiese $(a-pb)(a-cq) = bcpq$, de unde concluzia . **2 puncte**

(iii) Din **(ii)**, prin ridicare la pătrat, rezultă $a^2 \geq 4bcpq$, cu egalitate dacă şi numai dacă $bp = cq$ .... **1 punct**

În acest caz, dacă $\{D\} = AI \cap BC$, atunci $\dfrac{PB}{PA} \cdot \dfrac{QA}{QC} \cdot \dfrac{DC}{DB} = p \cdot \dfrac{1}{q} \cdot \dfrac{b}{c} = 1$, de unde, conform reciprocei teoremei lui Ceva, reiese cerinţa ... **1 punct**

Problema 2. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ dat prin $x_n = 2^n - n$, $n \in \mathbb{N}$. Determinaţi toate numerele naturale p pentru care

$$s_p = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_p$$

este o putere cu exponent natural a lui 2.

Gazeta Matematică

Soluţie. $s_p = 2^{p+1} - \dfrac{p(p+1)}{2} - 1$ .... **2 puncte**

Arătăm că $2^p < s_p < 2^{p+1}$ pentru $p \geq 3$ .... **2 puncte**

Aceasta rezultă deoarece, prin inducţie, $\dfrac{p(p+1)}{2} + 1 < 2^p$, pentru orice $p \geq 3$ (pentru $p = 3$ avem $7 < 8$) .... **2 puncte**

Observăm că $s_0 = 1 = 2^0$, $s_1 = 2 = 2^1$, $s_2 = 4 = 2^2$, deci răspunsul este $p \in \{0, 1, 2\}$ .... **1 punct**

Problema 3. Fie x un număr real. Arătaţi că x este număr întreg dacă şi numai dacă relaţia

$$[x] + [2x] + [3x] + \cdots + [nx] = \frac{n\left([x] + [nx]\right)}{2}$$

are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a.

Soluţie. Dacă $x \in \mathbb{Z}$, relaţia rezultă imediat, deoarece $[kx] = k[x]$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ .... **1 punct**

Pentru demonstrarea reciprocei, observăm că ipoteza implică

$$n\left([x] + [nx]\right) + 2[(n+1)x] = (n+1)\left([x] + [(n+1)x]\right)$$

.... **3 puncte**

Notând $t = \{x\}$, aceasta revine la $(n-1)[(n+1)t] = n[nt] - t$ ..**1 punct**

În cazul $t \neq 0$, alegând $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $1/(n+1) \leq t < 1/n$, obţinem contradicţia $n - 1 = -t$, deci presupunerea $t \neq 0$ este falsă ..... **2 puncte**

Problema 4. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ cu proprietatea

$$f(n) + f(n+1) + f(f(n)) = 3n + 1, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Soluţie. Din $f(1) + f(2) + f(f(1)) = 4$ reiese că $f(1) \in \{1, 2\}$ **2 puncte**

Dacă $f(1) = 1$, atunci $f(2) = 2$ şi, prin inducţie,

$$f(n) = n, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*$$

.... **2 puncte**

Dacă $f(1) = 2$, atunci $f(2) = 1$ şi, prin inducţie,

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ n-1, & \text{dacă } n \text{ este par} \end{cases}$$

.... **2 puncte**

Verificarea că soluţiile găsite îndeplinesc cerinţa .... **1 punct**