Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 13 Martie 2010

CLASA a X-a

Problema 1. Demonstraţi următoarele egalităţi de mulţimi

(i) $\{x \in \mathbb{R} \mid \log_2 [x] = [\log_2 x]\} = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} [2^m,\ 2^m + 1)\,.$

(ii) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 2^{[x]} = [2^x]\right\} = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} [m,\ \log_2 (2^m + 1))\,.$

Prin $[a]$ *s-a notat partea întreagă a numărului real* a.

Problema 2. Fie $a \in [-2, \infty)$, $r \in [0, \infty)$ şi numărul natural $n \geq 1$. Arătaţi că

$$r^{2n} + ar^n + 1 \geq (1 - r)^{2n}\,.$$

Gazeta Matematică

Problema 3. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$3f\,(f\,(f\,(n))) + 2f\,(f\,(n)) + f\,(n) = 6n,\ \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Problema 4. Fie şirul $a_n = \left| z^n + \dfrac{1}{z^n} \right|$, $n \geq 1$, unde $z \in \mathbb{C}^*$ este dat.

(i) Demonstraţi că dacă $a_1 > 2$, atunci

$$a_{n+1} < \frac{a_n + a_{n+2}}{2},\ \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

(ii) Demonstraţi că dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_k \leq 2$, atunci $a_1 \leq 2$.

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 13 Martie 2010

CLASA A X-A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Demonstraţi următoarele egalităţi de mulţimi

(i) $\{x \in \mathbb{R} \mid \log_2 [x] = [\log_2 x]\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} [2^m,\ 2^m + 1)\,.$

(ii) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 2^{[x]} = [2^x]\right\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} [m,\ \log_2 (2^m + 1))\,.$

Prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a.

Soluţie.
(i) Dacă $[\log_2 x] = m$, atunci $2^m \le x < 2^{m+1}$ .... **1 punct**
Din $\log_2 [x] = m$, rezultă $[x] = 2^m$, apoi $2^m \le x < 2^m + 1$ ... **1 punct**
Pentru $x \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} [2^m,\ 2^m + 1)$, avem $[\log_2 x] = \log_2 [x] = m$ .. **1 punct**
(ii) Dacă $[2^x] = t \in \mathbb{N}$, atunci $\log_2 t \le x < \log_2 (t + 1)$ .... **1 punct**
Din $2^{[x]} = t$, rezultă $[x] = \log_2 t = m \in \mathbb{N}$, apoi rezultă şi $m \le x < \log_2 (2^m + 1)$ .... **2 puncte**
Reciproc, pentru $x \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} [m,\ 2^m + 1)$, avem $[2^x] = 2^{[x]} = m$ **1 punct**

Problema 2. Fie $a \in [-2, \infty)$, $r \in [0, \infty)$ şi numărul natural $n \ge 1$. Arătaţi că

$$r^{2n} + ar^n + 1 \ge (1 - r)^{2n}\,.$$

Gazeta Matematică

Soluţie.
Prin împărţire cu r^{2n}, se obţine o inegalitate similară în $1/r$; se poate deci presupune că $r \in (0, 1)$ (cazul $r = 0$ este trivial) .... **2 puncte**
$r^{2n} + ar^n + 1 \ge r^{2n} - 2r^n + 1 = (1 - r^n)^2$, ... **2 puncte**
deci este suficient să arătăm că $1 - r^n \ge (1 - r)^n$, ... **1 punct**
dar $r^n + (1 - r)^n \le r + (1 - r) = 1$ .... **2 puncte**

Problema 3. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$3f\,(f\,(f\,(n))) + 2f\,(f\,(n)) + f\,(n) = 6n,\ \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Soluţie.
Funcţia f este injectivă .... **1 punct**
Pentru $n = 0$, obţinem

$3f\left(f\left(f\left(0\right)\right)\right)+2f\left(f\left(0\right)\right)+f\left(0\right)=0$, deci $f\left(0\right)=0$ .... **1 punct**
Presupunem $f\left(0\right)=0,\ f\left(1\right)=1,\ldots,\ f\left(n\right)=n$ .... **1 punct**
Din injectivitate, $f\left(n+1\right)\geq n+1$ .... **1 punct**
şi $f\left(f\left(n+1\right)\right)\geq n+1,\ f\left(f\left(f\left(n+1\right)\right)\right)\geq n+1$ .... **1 punct**
dar $3f\left(f\left(f\left(n+1\right)\right)\right)+2f\left(f\left(n+1\right)\right)+f\left(n+1\right)=6n+6$ .. **1 punct**
Finalizare, $f\left(n\right)=n$, oricare ar fi n .... **1 punct**

Problema 4. Fie şirul $a_n=\left|z^n+\dfrac{1}{z^n}\right|$, $n\geq 1$, unde $z\in\mathbb{C}^*$ este dat.

(i) Demonstraţi că dacă $a_1>2$, atunci

$$a_{n+1}<\frac{a_n+a_{n+2}}{2},\ \text{pentru orice } n\in\mathbb{N}^*.$$

(ii) Demonstraţi că dacă există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a_k\leq 2$, atunci $a_1\leq 2$.

Soluţie.
(i) $2\left|z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right|<\left|z+\frac{1}{z}\right|\cdot\left|z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right|$ .... **1 punct**
$=\left|z^n+\frac{1}{z^n}+z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}}\right|\leq\left|z^n+\frac{1}{z^n}\right|+\left|z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}}\right|$ ...... **2 puncte**
(ii) Presupunem prin absurd $a_1>2$. Conform cu **(i)**, şirul $a_{n+1}-a_n$ este strict crescător .... **1 punct**
$a_{n+1}-a_n>a_2-a_1=\left|z^2+\frac{1}{z^2}\right|-\left|z+\frac{1}{z}\right|$ .... **1 punct**
$\left|z^2+\frac{1}{z^2}\right|>\left|z+\frac{1}{z}\right|$, deoarece $2\left|z+\frac{1}{z}\right|<\left|z+\frac{1}{z}\right|^2=\left|z^2+\frac{1}{z^2}+2\right|\leq\left|z^2+\frac{1}{z^2}\right|+2<\left|z^2+\frac{1}{z^2}\right|+\left|z+\frac{1}{z}\right|$ .... **1 punct**
Şirul a_n este strict crescător, deci $a_k\geq a_1>2$, contradicţie . **1 punct**