Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 13 Martie 2010

CLASA a XII-a

Problema 1. Fie S suma elementelor inversabile ale unui inel finit. Arătaţi că $S^2 = S$ sau $S^2 = 0$.

Problema 2. Fie G un grup cu proprietatea că dacă $a, b \in G$ şi $a^2b = ba^2$, atunci $ab = ba$.

(i) Dacă G are 2^n elemente, arătaţi că G este abelian.

(ii) Daţi un exemplu de grup neabelian care are proprietatea din enunţ.

Gazeta Matematică

Problema 3. Fie $a < c < b$ trei numere reale şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă în c. Arătaţi că dacă f are primitive pe fiecare dintre intervalele $[a, c)$ şi $(c, b]$, atunci f are primitive pe intervalul $[a, b]$.

Problema 4. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, astfel încât $f(0) = f(1)$, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ şi $f'(x) \neq 1$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$.

(i) Demonstraţi că funcţia $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dată prin $g(x) = f(x) - x$ este strict descrescătoare.

(ii) Arătaţi că pentru orice număr întreg $n \geq 1$ avem

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \frac{1}{2}.$$

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 13 Martie 2010

CLASA A XII-A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Fie S suma elementelor inversabile ale unui inel finit. Arătaţi că $S^2 = S$ sau $S^2 = 0$.

Soluţie. Dacă $1 + 1 \neq 0$, atunci $x \neq -x$, oricare ar fi x inversabil, deci $S = 0$ (suma elementelor inversabile este 0 pe perechile $(x, -x)$).
.... **2 puncte**

În caz contrar, observăm că $xS = S$, oricare ar fi x inversabil. Prin sumare rezultă $S^2 = kS$, unde k este numărul elementelor inversabile.
.... **3 puncte**

Atunci pentru k impar obţinem $S^2 = S$, iar pentru k par obţinem $S^2 = 0$ (căci $1 + 1 = 0$).
.... **2 puncte**

Remarcă. Modele pentru diferitele cazuri sunt
• $S = 0$, pentru orice inel finit de caracteristică diferită de 2 (vezi mai sus), dar şi pentru corpurile finite $\mathbb{F}_{2^n}$ cu $n > 1$ (din $xS = S$ pentru orice x inversabil ar rezulta $x = 1$ dacă S inversabil, deci $S = 0$);
• $S = 1$, pentru inelele Booleene $\mathbb{Z}_2^n$ cu $n \geq 1$ (inclusiv corpul $\mathbb{F}_2$);
• $S^2 = 0$, dar $S \neq 0$, pentru inelul matricelor pătrate triunghiular-superioare de ordin 2, cu elemente în $\mathbb{F}_2$;
• $S^2 = S$, dar $S \neq 0$ şi $S \neq 1$, pentru inelele $\mathbb{F}_{2^n} \times \mathbb{F}_2$ cu $n > 1$.

Problema 2. Fie G un grup cu proprietatea că dacă $a, b \in G$ şi $a^2b = ba^2$, atunci $ab = ba$.

(i) Dacă G are 2^n elemente, arătaţi că G este abelian.

(ii) Daţi un exemplu de grup neabelian care are proprietatea din enunţ.

Gazeta Matematică

Soluţie.
(i) Pentru $a \in G$, fie $C(a) = \{b : b \in G \text{ şi } ab = ba\}$. Din ipoteză rezultă că $C(a^2) \subseteq C(a)$. Întrucât $C(a) \subseteq C(a^2)$, obţinem $C(a) = C(a^2)$, oricare ar fi $a \in G$. Prin urmare, $C(a) = C(a^2) = \cdots = C(a^{2^n}) = C(e) = G$, oricare ar fi $a \in G$, adică G este abelian.
.... **4 puncte**

(ii) Un exemplu de grup neabelian care are proprietatea din enunţ este grupul multiplicativ $(G, \cdot)$ al matricelor de forma

$$\begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & c \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \ a, b, c \in \mathbb{Z}_3.$$

Întrucât $A^3 = I_3$ oricare ar fi $A \in G$, dacă $A^2B = BA^2$, atunci avem şi $A^{-1}B = BA^{-1}$, deci $AB = BA$.
.... **3 puncte**

Remarcă. Orice grup finit G de ordin impar are proprietatea din enunţ, deoarece $C(a^2) \subseteq C(a^{|G|+1}) = C(a) \subseteq C(a^2)$ (deci $C(a) = C(a^2)$), oricare ar fi $a \in G$. Deci orice astfel de grup neabelian este un exemplu pentru **(ii)**.

Problema 3. Fie $a < c < b$ trei numere reale şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă în c. Arătaţi că dacă f are primitive pe fiecare dintre intervalele $[a, c)$ şi $(c, b]$, atunci f are primitive pe intervalul $[a, b]$.

Soluţie. Funcţia f are primitive pe intervalul $[a, b]$ dacă şi numai dacă funcţia $g = f + 1 - f(c)$ are primitive pe $[a, b]$. Deci putem presupune că $f(c) = 1$. Întrucât f este continuă în c, există $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$, astfel încât $c \in (\alpha, \beta)$ şi $0 < f(x) < 2$, oricare ar fi $x \in [\alpha, \beta]$.
.... **2 puncte**

Fie F_a, respectiv F_b, o primitivă a lui f pe intervalul $[a, c)$, respectiv $(c, b]$. Întrucât F_a şi F_b sunt crescătoare pe intervalele $[\alpha, c)$, respectiv $(c, \beta]$, rezultă că limitele $\lim\limits_{x \to c} F_a(x) = p$ şi $\lim\limits_{x \to c} F_b(x) = q$ există şi sunt finite, căci F_a şi F_b sunt mărginite pe aceste intervale (de exemplu, pentru $x \in (\alpha, c)$, avem $F_a(x) - F_a(\alpha) = f(\xi)$ pentru un anume $\xi \in (\alpha, x)$, dar f este mărginită pe $[\alpha, x] \subset [\alpha, \beta]$).
.... **3 puncte**

Funcţia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = F_a(x)$ pentru $x \in [a, c)$, $F(c) = p$ şi $F(x) = F_b(x) + p - q$ pentru $x \in (c, b]$, este o primitivă a lui f pe $[a, b]$.
.... **2 puncte**

Problema 4. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, astfel încât $f(0) = f(1)$, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ şi $f'(x) \neq 1$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$.

(i) Demonstraţi că funcţia $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dată prin $g(x) = f(x) - x$ este strict descrescătoare.

(ii) Arătaţi că pentru orice număr întreg $n \geq 1$ avem

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \frac{1}{2}.$$

Soluţia 1. **(i)** Deoarece f' (ca funcţie derivată) are proprietatea valorii intermediare (Darboux), rezultă că $f'(x) < 1$, oricare ar fi $x \in [0,1]$, sau $f'(x) > 1$, oricare ar fi $x \in [0,1]$. Conform teoremei lui Rolle, există însă un punct $c \in (0,1)$, astfel încât $f'(c) = 0$. Deci $f'(x) < 1$, oricare ar fi $x \in [0,1]$. Fie $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$. Cum $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$, oricare ar fi $x \in [0,1]$, rezultă că g este strict descrescătoare.

.... **1 punct**

(ii) Cum

$$s_\Delta(g) < \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x < S_\Delta(g),$$

unde $s_\Delta(g)$ şi $S_\Delta(g)$ sunt sumele Darboux inferioară, respectiv superioară ale lui g pentru diviziunea $\Delta = \{0, 1/n, \ldots, (n-1)/n, 1\}$, rezultă

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{k+1}{n}\right) < \int_0^1 (f(x) - x)\,\mathrm{d}x < \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{k}{n}\right).$$

.... **4 puncte**

Cum $f(0) = f(1)$ şi $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, obţinem

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{n+1}{2} < -\frac{n}{2} < \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{n-1}{2},$$

de unde rezultă inegalitatea din enunţ.

.... **2 puncte**

Soluţia 2. Aceeaşi demonstraţie pentru **(i)** ca în **Soluţia 1**.

.... **1 punct**

(ii) Fie $G : [0,1] \to \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) - \frac{x^2}{2}$, unde F este o primitivă a lui f. Funcţia $G'(x) = f(x) - x$ este strict descrescătoare, deoarece derivata sa $G''(x) = f'(x) - 1 < 0$, oricare ar fi $x \in [0,1]$.

.... **2 puncte**

Din teorema lui Lagrange, aplicată funcţiei G pe intervalul $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, $k = 0, \ldots, n-1$, rezultă că

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{k+1}{n} < n\left(F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{2k+1}{2n^2}\right) < f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{k}{n}$$

.... **2 puncte**

Prin sumarea acestor inegalităţi obţinem

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{n+1}{2} < n\left(F(1) - F(0) - \frac{1}{2}\right) < \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{n-1}{2}.$$

Cum $F(1) - F(0) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ şi $f(0) = f(1)$, rezultă inegalitatea cerută.

.... **2 puncte**

Remarcă. Concluzia rămâne adevărată, atât pentru $f(0) \leq f(1)$, cât şi atunci când condiţiile $f(0) = f(1)$ şi $f'(x) \neq 1$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$, sunt înlocuite prin condiţia $|f'(x)| < 1$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$.