OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA PE SECTOR
BUCUREŞTI , 13.02.2010
CLASA a VI-a

1. Să se determine cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietăţile $\frac{n}{2}$ este pătrat perfect şi $\frac{n}{7}$ este cub perfect.

(Dorela Făinişi-Revista „Arhimede")

2. Fie A, B două puncte situate pe dreapta d. Să se determine numerele $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ pentru care există n puncte $P_1, P_2, \ldots, P_n \in d \setminus [AB]$ cu proprietatea că : suma distanţelor de la A la punctele $P_1, P_2, \ldots, P_n$ este egală cu suma distanţelor de la punctul B la punctele $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

(Daniela Chiteş)

3. Să se determine numerele naturale nenule a şi b ştiind că $\frac{5b}{4a+3} = \frac{b-1}{a}$.

(Gazeta Matematică)

4. Determinaţi numărul natural $\overline{abc}$ ştiind că acesta este cel mai mare divizor comun al numerelor $\overline{2009abc}$ şi $\overline{abc2009}$

(Petre Simion)

Notă
Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă note cuprinse între 1 şi 7 pentru fiecare subiect.
Timp efectiv de lucru : 2 ore.

CLASA A VI-A

SOLUŢII ŞI BAREM DE CORECTARE

1. Cum $\frac{n}{2}=k^2 \Rightarrow 2\,|\,n$, $\frac{n}{7}=l^3 \Rightarrow 7\,|\,n$. **(2p).** Din minimitatea lui n avem că $n=2^a\cdot 7^b$, $a,b\in\mathbb{N}^*$ **.(2p)**

   Deci $\frac{n}{2}=2^{a-1}\cdot 7^b=k^2 \Rightarrow a-1=par$, $b=par$ şi $\frac{n}{7}=2^a\cdot 7^{b-1}=l^3 \Rightarrow 3\,|\,a$, $3\,|\,b-1$. Din toate acestea, rezultă valorile minime : $a=3$, $b=4 \Rightarrow n=2^3\cdot 7^4$. **(2p)**

2. Dacă toate punctele sunt de o parte a lui A sau de o parte a lui B , suma distanţelor la cele 2 puncte este diferită . **(1p)**

   Dacă avem i puncte la stânga lui A şi $n-i$ puncte la stânga lui B, atunci notând $AB=a$, vom avea : $P_1A+...+P_iA+(n-i)a+P_{i+1}B+...+P_nB=$

   $i\cdot a+P_1A+...+P_iA+P_{i+1}B+...+P_nB \Rightarrow a(n-2i)=0$,**(2p)** deci n nu poate fi impar.**(1p)**

   Dacă $n=2k=$par, atunci există o aşezare care convine : k puncte la stânga lui A şi simetricele lor faţă de mijlocul segmentului $[AB]$. **(2p)**

3. Proporţia este echivalentă cu $b(3-a)=4a+3$.**(1p).** Observăm că $a=3$ nu convine.**(1p).** Pentru $a\neq 3$ avem $b=\frac{4a+3}{3-a}$. Cum $a,b\in\mathbb{N}^* \Rightarrow 3-a\in\mathbb{N}^*$ şi $3-a\,|\,(4a+3)$.**(1p).** Se obţine $a=2$

   $a=2, b=11$. **(3p)**

   Metoda II

   Proporţia dată se poate scrie : $\frac{5a}{4a+3}=\frac{b-1}{b}$. Cum $\frac{b-1}{b}<1$ se impune condiţia

   $5a<4a+3 \Rightarrow a=2, b=11$.

4. $\overline{2009abc}=2009\cdot 1000+\overline{abc}$, $\overline{abc2009}=\overline{abc}\cdot 10000+2009 \Rightarrow \overline{abc}\,|\,2009000$, $\overline{abc}\,|\,2009$.**(3p)**

   Cel mai mare divizor comun al acestor numere fiind $7^2\cdot 41 \Rightarrow \overline{abc}=7\cdot 41=287$ **(3p)**