100
2010
Anul Matematicii în
Școala Românească
www.anulmatematicii.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA PE SECTOR
BUCUREȘTI , 13.02.2010
CLASA a VII-a

1. a) Fie numerele reale x_1, x_2, x_3 pentru care avem : $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_3| = |x_3 - x_1|$.
   Să se arate că $x_1 = x_2 = x_3$.
   b)Să se arate că nu există numere reale distincte două câte două y_1, y_2, y_3, y_4 care verifică egalitățile
   $$|y_1 - y_2| = |y_2 - y_3| = |y_3 - y_4| = |y_4 - y_1|$$
   (D.Săvulescu , L.Tuțescu)

2. Diagonalele unui patrulater convex $ABCD$ se intersectează în punctul O. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$ intersectează laturile $[AB]$ și $[CD]$ respectiv în punctele E și F. Să se arate că are loc egalitatea :
   $$\frac{OF}{OE} = \frac{OA + OB}{OA \cdot OB} \cdot \frac{OC \cdot OD}{OC + OD}$$
   (Viorel Chinan)

3. În paralelogramul $ABCD$ se consideră M mijlocul lui $[BC]$ și E intersecția lui AC cu DM. Să se arate că : $aria[ABME] = aria[\triangle ECM] + aria[\triangle ADE]$.
   (Fănişi Dorela- Revista „Arhimede“)

4. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$. Arătați că $\frac{1 + a^{n+1}}{1 + a^n} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$
   (Gazeta Matematică)

Notă
Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă note cuprinse între 1 și 7 pentru fiecare subiect.
Timp efectiv de lucru : 3 ore.

CLASA A VII-A

SOLUȚII ȘI BAREM DE CORECTARE

1. a)Fie k valoarea comună a modulelor, atunci : $x_1 - x_2 = \pm k$, $x_2 - x_3 = \pm k$, $x_3 - x_1 = \pm k$.**(1p)**
   Adunând aceste egalități se obține : $0 = k(\pm 1 \pm 1 \pm 1)$. Deci $k = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3$. **(2p)**
   b)Dacă $x_1 - x_2 = x_4 - x_1$ atunci avem următoarele două subcazuri :
   i) $x_2 - x_3 = x_3 - x_4 \Rightarrow x_2 + x_4 = 2x_3 \Rightarrow x_1 = x_3$;**(1p)** ii) $x_2 - x_3 = x_4 - x_3 \Rightarrow x_2 = x_4$. [redacted]
   Dacă $x_1 - x_2 = x_1 - x_4 \Rightarrow x_2 = x_4$. **(2p)**
2. Fie $OA = a, OB = b, OC = c, OD = d$. Construim $AG \parallel EF, G \in BD$ și $DH \parallel EF, H \in AC$.
   Utilizând T.F.A în $\triangle BAG \Rightarrow \frac{EO}{AG} = \frac{b}{a+b}$ și apoi aceeași teoremă în $\triangle CDH$ $\Rightarrow \frac{OF}{HD} = \frac{c}{c+d}$.
   Prin împărțirea acestor relații obținem : $\frac{OF}{OE} = \frac{c(a+b)}{b(c+d)} \cdot \frac{DH}{AG}$ (1). Dar în
   $\triangle ODH$, $AG \parallel HD \Rightarrow \frac{DH}{AG} = \frac{OD}{OG} = \frac{d}{a}$ (2) $(\triangle OAG = isoscel)$. Din (1) și (2) rezultă afirmația .**(6p)**
3. Fie $A = aria[ABCD]$; $\triangle CEM \sim \triangle AED$ având raportul de asemănare egal cu $\frac{1}{2}$.
   $aria(\triangle DMC) = \frac{A}{4}$; $aria(\triangle EBC) = \frac{A}{6} \Rightarrow aria(\triangle EMC) = \frac{A}{12}$; $aria(\triangle EDA) = \frac{A}{3}$.
   Vom obține : $aria(\triangle EMC) + aria(\triangle EDA) = \frac{A}{3} + \frac{A}{12} = \frac{5 \cdot A}{12}$. Cum
   $aria(\triangle EDC) = \frac{A}{6} \Rightarrow aria[AEMB] = \frac{5 \cdot A}{12}$. **6p)**
4. Presupunem contrariul. Atunci $a^n + 1 | (a^{n+1} + 1) \Rightarrow a^n + 1 | a(a^n + 1) + (1 - a) \Rightarrow a^n + 1 | (a - 1)$.
   Cum $a - 1 \neq 0 \Rightarrow a^n + 1 \leq a - 1$, contradicție. **(6p)**