



OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALA
13.02.2010

Clasa a V a

1. a) Se considera multimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^x + 3^x + 5^x = 3\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y^2 - 5 < 10\}$.
Determinați multimile A , B , $A - B$, $(A \cup B) - (A \cap B)$, $A \times B$. 5p
b) Găsiți numărul de elemente al multimii $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^{20} < x < 2^{21}\}$. 2p
2. a) Să se arate că numărul $N = 5^{2009} + 6^{2010} + 3^{2009} + 4^{2010}$ nu este pătrat perfect. 4p
b) Fie $a = 1111 + 2222 + \dots + 9999$. Arătați că a este divizibil cu 1515. 3p
3. Tatăl și fiul au împreună 47 de ani. Fiul și mama au împreună 42 de ani.
În urma cu 7 ani suma varstelor celor 3 era egală cu 59 de ani.
a) Aflați ce vârstă are fiecare. 5p
b) Peste câți ani vârsta fiului va fi jumătate din vârsta mamei? 2p
4. a) Scrieți numărul 3^{2010} ca o sumă de trei numere naturale consecutive. 4p
b) Scrieți numărul 5^{2010} ca o sumă de cinci numere naturale consecutive. 3p

Nota :

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect se notează de la 7 la 0 puncte .

Timp de lucru 2 ore

Barem de notare

Clasa a V a

1. a) Cate 1 punct fiecare multime determinata	5p
b) Rezolvare	2p
2. a) Se acorda 3 puncte pentru calculul ultimei cifre	3p
Finalizare 1 punct	1p
b) Se acorda 1 punct pentru factorul comun	1p
Finalizare 2 puncte	2p
3. a) Scrierea relatiilor 3 puncte	3p
Determinarea varstelor 2 puncte	2p
b) Se acorda 1 punct pentru scrierea relatiei	1p
Finalizare 1 punct	1p
4. a) Gasirea unei sume corecte 2 puncte	2p
Scrierea ca numere consecutive 2 puncte	2p
b) Scrierea ca numere consecutive 3puncte	3p



OLIMPIADA DE MATEMATICA
 FAZA LOCALA
 13.02.2010

Clasa a VI a

1. a) Aratati ca numarul a este natural, unde: $a = \frac{9 \cdot 1 + 9 \cdot 3 + 9 \cdot 5 + \dots + 9 \cdot 95}{9^2 - 8 \cdot 9^8 - 8 \cdot 9^7 - \dots - 8 \cdot 9^2 - 9}$ 5p

b) Aflati x,y,z,t numere prime pentru care:

$x+y+z+t=11$ și $x \leq y \leq z \leq t$. 2p

2. a) Fie numerele $a = (3^{11} \cdot 9^8 : 27^8 - 2^4 \cdot 4^7 : 8^5 - 5^0) \cdot 3^8 \cdot 2^y$, $y = 2^3$
 $b = 2^{n+1} \cdot 3^{n+4} - 2^{n+4} \cdot 3^{n+2}$

Aflati n apartine lui N^* a.i. $(a, b) = 2^3 \cdot 3^4$ 5p

b) Determinati numerele naturale x pentru care fractia $\frac{7x+3}{3x+7}$ reprezinta un

numar natural. 2p

3. Un segment [AB] este impartit de A_1, A_2, \dots, A_{999} in 1000 segmente astfel incat:
 $AA_1 = A_1A_2 = 1 \text{ cm}$, $A_2A_3 = A_3A_4 = 2 \text{ cm}$, $A_4A_5 = A_5A_6 = 3 \text{ cm}$ si asa mai departe

a) Care este lungimea segmentului A_9A_{10} ? 2p

b) Aratati ca punctul A_4 este mijlocul segmentului AA_6 . 2p

c) Care este lungimea segmentului AB exprimata in km? 3p

4. Se considera punctele colineare A, O si C (in aceasta ordine) si punctul B exterior dreptei AC . Fie [OM bisectoarea unghiului BOC , [ON bisectoarea unghiului AOM (N in interiorul unghiului BOC) , [OP bisectoarea unghiului AOB si [OI bisectoarea unghiului AOP .

Aflati : a) $m(\widehat{POM})$ 2p

b) $m(\widehat{ION})$. 5p

Nota :

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect se noteaza de la 7 la 0 puncte .

Timp de lucru 2 ore

Barem de notare

Clasa a VI a

1. a) Calculul numaratorului 2 puncte	2p
Calculul numitorului 2 puncte	2p
Finalizare 1 punct	1p
b) Fiecare solutie 1 punct	2
2. a) Se acorda cate 2 puncte pentru calculul numarelor a si b	4p
Finalizare 1 punct	1p
b) Se acorda 1 punct pentru scrierea conditiei de divizibilitate	1p
Finalizare 1 punct .	1p
3. a) Calculul lungimii segmentului 2 puncte	2p
b) Se acorda 2 puncte pentru determinarea congruentei	2p
c) Calculul 3 puncte	3p
4. a) Masura unghiului POM =90 grade 2 puncte	2p
b) Masura unghiului AOB egala cu $4x$ rezulta masura lui AOM egala cu 90^0+2x 2 puncte	2p
Masura lui AON egala cu 45^0+2x , 1 punct	1p
Masura lui AOQ egala cu $2x$, 1 punct	1p
Finalizare 1 punct masura ION = 45^0	1p



MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI INOVĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ILFOV

Calea 13 Septembrie nr. 209, sector 5, București
Tel: 021.317.36.50 / 021.317.36.51, Fax: 021.317.36.54
E-mail: secretariat@isjilfov.ro Web: www.isjilfov.ro



OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALA
13.02.2010

Clasa a VII a

1) a) Calculați: $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)}$ 2p

2) b) Aratați ca rezultatul calculului $S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{2009}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2010}$ este o fracție subunitară. 3p

c) Aratați ca $\frac{5}{2 \cdot 5} + \frac{9}{3 \cdot 8} + \frac{9}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{9}{47 \cdot 50} < \frac{3}{2}$ 2p

2) Paralelogramul ABCD are $AB=6\sqrt{2}$ cm, $BC=6$ cm și $m(\angle A)=45^\circ$. În exteriorul său se construiește triunghiul dreptunghic isoscel ABF, cu $AF=FB=6$ cm.

a) Aratați ca AFBD este un pătrat. 4p
b) Calculați aria paralelogramului ABCD. 3p

3) a) Fie k un număr natural, $k \in \{1; 2; 3; \dots; 2009\}$. Demonstrați că dacă $\frac{k}{2010}$ este o fracție ireductibilă, atunci și fracția $\frac{2010-k}{2010}$ este ireductibilă. 4p

b) Demonstrați că în mulțimea $\left\{ \frac{1}{2010}; \frac{2}{2010}; \frac{3}{2010}; \dots; \frac{2009}{2010} \right\}$, numărul fracțiilor ireductibile este par. 3p

4) În exteriorul pătratului ABCD se construiește pătratul BEFG astfel încât $[AB]=[BE]$, iar

punctele A și E sunt de aceeași parte a dreptei DF.

a) Aflați natura patrulaterului convex determinat de punctele C, G, E, A. 3p

b) Aratați ca $\frac{m(\widehat{CBG})}{m(\widehat{GFD})} = \text{constant}$. 4p

Nota :

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect se notează de la 7 la 0 puncte .

Timp de lucru 3 ore

Barem de notare

Clasa a VII a

1. a) Calculul efectiv 2 puncte	2p
b) Calculul sumei 2 puncte	2p
Finalizare 1 punct	1p
c) Descompunerea fractiilor 1 punct	2p
Finalizare 1 punct	1p
2. a) DAFB romb (3 puncte)	3p
Finalizare 1 punct	1p
b) Se acorda 1 punct pentru formula ariei paralelogramului	1p
Finalizare 2 puncte.	2p
3. a) Presupunem $d \mid 2010-k$ și $d \mid 2010$. Rezultă $d \mid k$. 2puncte	2p
Finalizare 2 puncte	2p
b) Determinarea fractiilor ireductibile	2p
Finalizare 1 punct	1p
4. a)i) $AE \parallel CG$ (1 punct) $GE = CA$ (1punct) ii) A,B,G colineare rezulta CGEA dreptunghi (1punct)	3p
b) Masura lui $CBG = x^0$ rezulta ca masura lui $BFD = (90^0-x)/2$ (2 puncte)	4p
Masura lui DFG egala cu $x/2$ (1punct) Finalizare (1punct)	



MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI INOVĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ILFOV

Calea 13 Septembrie nr. 209, sector 5, București
Tel: 021.317.36.50 / 021.317.36.51, Fax: 021.317.36.54
E-mail: secretariat@isjilfov.ro Web: www.isjilfov.ro



OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALA
13.02.2010

Clasa a VIII a

1) Fie $A = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 1)} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 3 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2009} \cdot 2010 \cdot (\sqrt{2010} + \sqrt{2009})}$

Arătați că $N = A \cdot [1 + (\sqrt{2010})^{-1}]$ este un număr rațional. 7p

2) a) Fie $a = \sqrt{n^2 - 2n\sqrt{3} + 3} - |\sqrt{3} - 2| + 1$, $n > 1$, n număr natural. Arătați
că numărul a este natural. 3p

b) Rationalizați numitorul fracției $\frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}$. 4p

3) a) Arătați că: $(x^2 - 5x + 3)(x^2 - 5x + 9) + 9$ este pătrat perfect. 2p

b) Fie expresia: $A(x, y) = \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{y^2 - 6y + 10}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.
Determinați valoarea minimă a expresiei $A(x, y)$. 5p

4) În tetraedrul regulat ABCD cu $AB = a$ se considera punctul E este mijlocul
muchiei BC. Determinați:

a) măsura unghiului dintre dreptele AD și BC; 3p

b) distanța de la D la AE; 2p

c) poziția punctului M pe AD pentru care suma $EM + MC$ este minimă. 2p

Nota:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

Barem de notare

Clasa a VIII a

1. Amplificarea fractiilor (2puncte) Descompunerea fractiilor (3puncte) Finalizare (2 puncte)	7p
2.a) Scoaterea de sub radical (1punct) Calculul modulului (1punct) Finalizare (1punct)	3p
b) Amplificare cu conjugata numitorului (grupate la alegere) (2puncte) Finalizare (2puncte)	4p
3. a) Scrierea patratului (2puncte)	2p
b) Restrangerea patratelor in radicali (4puncte) Finalizare (1punct)	5p
4. a) Realizarea desenului (1punct) Demonstratia ca AD perpendicular pe BC (2 puncte)	3p
b) Calculul distantei cerute (2 puncte)	2p
c) Scrierea conditiei de coliniaritate pe desfasurarea tetraedrului(1 punct) Finalizare (1 punct)	2p