



Inspectoratul Școlar al Județului Prahova
Olimpiada de matematică
Etapa locală-13 februarie 2010
Clasa a V-a
Subiecte

1. Fie mulțimea $A = \{3, 7, 11, \dots\}$ cu elementele în ordine crescătoare și $\text{card } A = 100$.

- Este 231 element al mulțimii A ?
- Aflați cel mai mare element al mulțimii A .

G.M. 1/2009

2. Mulțimea M conține toate numerele naturale, scrise în baza 10, de forma \overline{abcd} cu proprietatea că suma $S = 1 + 3 + 5 + \dots + \overline{abcd}$ dă restul \overline{abcd} la împărțirea cu 10^4 .

Care este numărul minim de numere pe care trebuie să le scoatem din mulțimea M pentru a fi siguri că cel puțin unul este divizibil cu 3?

Prof. Gheorghe Bumbăcea, Bușteni

3. a) Aflați valoarea maximă a lui n , $n \in \mathbf{N}$, astfel încât $230^n \mid 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2010$.

- Sa se scrie numărul 230 ca suma de trei pătrate perfecte
- Sa se scrie numărul 230^{2n+1} , $n \in \mathbf{N}$, ca suma de trei pătrate perfecte și ca sumă de patru pătrate perfecte.

Prof. Viorica Preda, Prof. Adelina Apostol- Ploiesti

4. a) Sa se determine numărul numerelor de două cifre cu proprietatea că suma resturilor împărțirii fiecărui număr la 4, respectiv 6, este 6.

- Sa se determine suma acestor numere.

Prof. Petre Nachila, prof. Catalin Nachila-Ploiesti

www.mategl.com

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10



Inspectoratul Școlar al Județului Prahova
Olimpiada de matematică
Etapa locală-13 februarie 2010
Clasa a VI- a
Subiecte

1. Andrei vine la bazinul de înot la fiecare două zile. Roxana vine la fiecare cinci zile. Cristina vine la fiecare opt zile. Astăzi este sâmbătă și au venit toți trei.

- a) În ce zi a săptămânii se vor întâlni, pentru prima oară, iarăși cei trei: Andrei, Cristina și Roxana?
- b) Este posibil ca în timp de un an de zile să se mai întâlnească toți trei tot într-o sâmbătă? Justificați răspunsul.

Prof. Ioana Crăciun și prof. Gheorghe Crăciun, Ploiești

2. Fie d o dreaptă și A și B două puncte fixe, de o parte și de alta a dreptei d . Spunem că un punct $M \in d$ are proprietatea p dacă $[AM] \equiv [MB]$. Demonstrați că dacă pe dreapta d există două puncte cu proprietatea p , atunci toate punctele dreptei au proprietatea p .

G.M. 4/2009

3. Aflați $a \in \mathbf{N}$ știind că c.m.m.d.c. al numerelor $5a+13$ și $3a+5$ este $a+1$

Prof. Gh. Achim, Mizil

4. Să se găsească numerele naturale a, b, c știind că au suma 120 și sunt direct proporționale cu trei numere prime consecutive.

Prof. Tatiana Pană-Ploiești

www.mategl.com

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Școlar al Județului Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-13 februarie 2010

Clasa a VII-a

Subiecte

1. Fie n un număr întreg negativ și $E(x) = x + 3$. Determinați valorile întregi ale lui n pentru care $3\sqrt{3} - E(n) > 3 - E(n\sqrt{3})$.

Prof. Maria și Anton Negrilă, Ploiești

2. Dacă $a, b, c \in \mathbf{Q}$ astfel încât $ab+bc+ca = 2010$, arătați că

$$\sqrt{(2010+a^2)(2010+b^2)(2010+c^2)} \in \mathbf{Q}$$

Prof. Gheorghe Achim, Mizil

3. Fie ABC un triunghi echilateral ABC, $D \in BC$ astfel încât $[DC] \equiv [BC]$ și $E \in AC$ astfel încât $[AE] \equiv [AC]$. Dacă $DE \cap AB = \{F\}$, arătați că $AB=3AF$.

Gazeta Matematică 2009

4. Mediana $[BM]$ ($M \in AC$) a triunghiului ascuțitunghic ABC întâlnește paralela prin C la AB în E, iar mediana $[BF]$ ($F \in EC$) a triunghiului BCE intersectează pe AC în N.

a) Demonstrați că AECB este paralelogram.

b) Determinați raportul dintre aria triunghiului MNF și aria paralelogramului AECB.

Magdalena-Maria Georgescu, Mihail Focșeneanu, Ploiești

www.mategl.com

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10



Inspectoratul Școlar al Județului Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-13 februarie 2010

Clasa a VIII-a

Subiecte

1. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $4m^2+4n=n^2+4m+11$.

Gazeta Matematică, 2009

2. Arătați că numărul $a=9002010 \cdot 9002011 \cdot 9002012 \cdot 9002013 + 1$ este pătrat perfect.

Prof . Petre Burdușel, Ploiești

3. Fie ABCDEF un hexagon regulat de latură a , iar $M \in (ABC)$ situat pe mediatoarea segmentului $[EC]$ astfel încât distanța de la M la EF este $ME=a$. Calculați distanța de la M la planul (ABC) și distanța de la M la dreapta AE .

Prof Ion Tomescu, prof Ion Lupea

4. În $\triangle ABC$ isoscel ($AB=AC$) punctul M este mijlocul medianei $[AQ]$, $Q \in (BC)$ iar $AQ=BC=12cm$. Se notează cu P și R respectiv centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABM și ACM . Pe perpendiculara în M pe planul (ABC) se ia punctul S astfel încât $SM=3cm$.

a) Demonstrați ca $PR \parallel BC$.

b) Aflați măsura unghiului format de planele (SPR) și (ABC) .

c) Aflați distanța de la M la planul (SQR) .

Prof. Silvia și Ionel Brabeceanu, Plopeni

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10



Inspectoratul Școlar al Județului Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-13 februarie 2010

Clasa a IX-a

Subiecte

1. Fie numerele reale pozitive $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ astfel încât

$$a_1 + a_2 = 4, a_2 + a_3 = \frac{4}{3}, a_3 + a_4 = \frac{4}{5}, a_4 + a_5 = \frac{4}{7}, \dots, a_{19} + a_{20} = \frac{4}{37} \quad \text{și}$$

$$A = \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} + \frac{a_2 + a_3}{a_2 a_3} + \frac{a_3 + a_4}{a_3 a_4} + \dots + \frac{a_{19} + a_{20}}{a_{19} a_{20}}. \text{ Demonstrați că } \sqrt{A} > 19.$$

Prof Nicolae Radu, Ploiești

2. Rezolvați ecuația:

$$[x^2 - 4x + 4] = [-2x^2 + 8x - 6].$$

Prof. Petre Năchilă, prof Cătălin Năchilă, Ploiești

3. Fie ABCDEF un hexagon convex oarecare, G_1, G_2 centrele de greutate ale $\triangle ACE, \triangle BDF$, H_1, H_2 ortocentrele $\triangle ACE, \triangle BDF$ și G punctul din planul hexagonului cu proprietatea că $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} + \vec{GE} + \vec{GF} = \vec{0}$.

a) Arătați că $\vec{G_1A} + \vec{G_1C} + \vec{G_1E} = \vec{0}$.

b) Arătați că $\vec{G_1G}$ și $\vec{G_2G}$ sunt vectori coliniari.

c) Dacă hexagonul are toate vârfurile pe un cerc aratati că $\vec{G_1G} = \frac{1}{6} \vec{H_1H_2}$.

prof. Leu Gabriela, Sinaia

4. Fie triunghiul ABC , M - mijlocul lui $[BC]$, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$, $DE \cap AM = \{N\}$.

Demonstrați că:

a) dacă N este mijlocul lui $[DE]$, atunci vectorii \vec{DE} și \vec{BC} sunt coliniari.

b) dacă N este mijlocul lui $[AM]$ și $2DB = 3DA$, atunci vectorii \vec{ME} și \vec{BN} sunt coliniari.

Prof. Claudiu Militaru, Ploiești

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

www.mategl.com

Inspectoratul Școlar al Județului Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-13 februarie 2010

Clasa a X a

Subiecte

1. Demonstrați inegalitatea $\log_3(1+a+b) \cdot \log_3(1+b+c) \cdot \log_3(1+c+a) \leq 1$, știind că $a, b, c > 0$ și $a + b + c = 3$.

Prof. Doinaru Mihaiela, Sinaia

2. Rezolvați ecuația : $x + \sqrt{2^x(x+1)} = \sqrt{x+1}$.

Prof Necula Gabriel, Plopeni

3. Fie n un număr întreg.

a) Dacă r este restul împărțirii lui n^3 la 9, arătați că $r \in \{0,1,8\}$.

b) Demonstrați că $[\sqrt[3]{9n+1}] = [\sqrt[3]{9n+7}]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

Prof Cezar Apostolescu , Ploiești

4. Fie $(z_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere complexe de același modul, cu proprietatea că

$z_k^2 = z_{k-1} \cdot z_{k+1}$, $\forall k \geq 2$. Știind că cel puțin trei termeni ai șirului sunt numere reale, arătați că mulțimea termenilor șirului este finită.

Gazeta Matematică 2009

www.mategl.com

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10



Inspectoratul Școlar al Județului Prahova
Olimpiada de matematică
Etapa locală-13 februarie 2010
Clasa a XI-a
Subiecte

1. Fie sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_0 > 0$, $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{1}{\sqrt{x_{n+1}}}$, $n \geq 0$. Sa se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 x_n^3$

G.M.4/2009

2. Fie sirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ cu proprietatile :

a) $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$

b) $a_{n+1}^2 \cdot a_n^2 = 27 + 2a_{n+1} \cdot a_n^2$, $\forall n \in \mathbf{N}$ Sa se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

Prof. Octavian Purcaru-Ploiesti

3. Pentru fiecare numar natural considerăm matricea de ordinul 3 :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2^{[\sqrt{n+1}]} & 2^{[\sqrt{n+2}]} & 2^{[\sqrt{n+3}]} \\ 2^{[\sqrt{n+4}]} & 2^{[\sqrt{n+5}]} & 2^{[\sqrt{n+6}]} \\ 2^{[\sqrt{n+7}]} & 2^{[\sqrt{n+8}]} & 2^{[\sqrt{n+9}]} \end{pmatrix}. \text{Sa se arate ca exista } k \in \mathbf{N} \text{ astfel incat } \forall n \geq k, n \in \mathbf{N},$$

matricea A_n nu este inversabila (am notat cu $[a]$ –partea intregă a lui a).

Prof. Emil Vasile -Ploiesti

4. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & \varepsilon^2 b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b, \varepsilon \in \mathbf{C}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ si $n \in \mathbf{N}^*$

a) Sa se demonstreze că : $A^n = \begin{pmatrix} \frac{(a+b\varepsilon)^n + (a-b\varepsilon)^n}{2} & \frac{(a+b\varepsilon)^n - (a-b\varepsilon)^n}{2} \varepsilon \\ \frac{(a+b\varepsilon)^n - (a-b\varepsilon)^n}{2\varepsilon} & \frac{(a+b\varepsilon)^n + (a-b\varepsilon)^n}{2} \end{pmatrix}$

b) Sa se calculeze B^n

c) Sa se rezolve in $M_2(\mathbf{C})$ ecuatia $X^n = B$

Prof. Cezar Apostolescu-Ploiesti

www.mategl.com

SUCCES!

Notă:

Timpe de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10



Inspectoratul Școlar al Județului Prahova
Olimpiada de matematică
Etape locală-13 februarie 2010
Clasa a XII-a
Subiecte

1. Calculati : a) $I_1 = \int \frac{(x^2-1)dx}{x\sqrt{x^4+2x^3+x^2+2x+1}}$, $x \in (0, +\infty)$.

Prof. Gabriel Necula - Ploeni

b) $I_2 = \int \frac{9x^3+9mx^2+(18+2m^2)x+12m}{(3x^2+2mx+5)^n} dx$, $x \geq 0, m \geq 0, n \in \mathbf{N}^*, n \geq 3$

Prof. Doinaru Mihaiela-Sinaia

2. Se consideră sirurile :

$$I_n = \int_{-a}^a \sin^2 nx \cdot \ln \frac{2a+x}{2a-x} dx \quad \text{și} \quad K_n = \int_0^a \sin^2 nx \cdot \ln \frac{2a+x}{2a-x} dx, \text{ unde } a > 0, \text{ fixat, } n \in \mathbf{N}^*$$

a) Sa se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$

b) Sa se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n$

Prof. Octavian Purcaru-Ploiesti

3. Fie A un inel cu proprietatea că dacă $x \in A$ și $x^2=0$, atunci $x=0$. Fie $a, b, c \in A$, astfel încât $a=ab, b=bc, c=ca$. Sa se arate ca $a=b=c$.

G.M.9/2008

4. Pe \mathbf{R} se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - ax - ay + a^2 + a$, $a \in \mathbf{R}$.

a) Determinați $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ pentru care intervalul $[\alpha, \beta]$ este parte stabilă în raport cu legea și pentru care $\beta - \alpha$ este maxim ;

b) Pentru α, β determinați la punctul a), aflați multimile $H \subset [\alpha, \beta]$ astfel încât (H, \circ) grup .

Prof. Militaru Claudiu –Ploiesti

www.mategl.com

SUCCES!

Notă:

Timpe de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10