Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa finală – Timişoara, 30 aprilie 2008

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Fie $a > 0$ şi funcţia $f : [0, \infty) \to [0, a]$, continuă pe $(0, \infty)$ şi cu proprietatea lui Darboux pe $[0, \infty)$. Să se arate că, dacă $f(0) = 0$ şi

$$xf(x) \geq \int_0^x f(t)\mathrm{d}t, \quad \text{oricare ar fi } x \in [0, \infty),$$

atunci f are primitive pe $[0, \infty)$.

Subiectul 2. Se consideră funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, derivabilă, cu derivata f' continuă pe $[0, 1]$. Să se arate că, dacă $f(1/2) = 0$, atunci

$$\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geq 12 \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

Subiectul 3. Fie A un inel finit cu n elemente, cu proprietatea că ecuaţia $x^n = 1$ are soluţie unică, $x = 1$. Să se arate că:

(a) 0 este unicul element nilpotent al inelului A;

(b) există $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, astfel încât ecuaţia $x^k = x$ are n soluţii în A.

($x \in A$ este *nilpotent* dacă există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^m = 0$.)

Subiectul 4. Fie $\mathcal{G}$ mulţimea grupurilor finite cu cel puţin două elemente.

(a) Să se arate că, dacă $G \in \mathcal{G}$, atunci

$$|\mathrm{End}(G)| \leq \sqrt[p]{n^n},$$

unde $|\mathrm{End}(G)|$ este numărul endomorfismelor lui G, $n = n(G)$ este numărul elementelor lui G, iar $p = p(G)$ este cel mai mare divizor prim al lui n.

(b) Să se determine grupurile din $\mathcal{G}$ pentru care inegalitatea de la punctul (a) este egalitate.

Timp de lucru: 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii.

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa finală – Timişoara, 30 aprilie 2008

CLASA A XII-A – SOLUŢII

Subiectul 1. Întrucât f este continuă pe intervalul $(0,\infty)$ şi mărginită, rezultă că f este integrabilă pe intervalul $[0,x]$, oricare ar fi $x \geq 0$. Prin urmare, funcţia $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

este derivabilă pe intervalul $(0,\infty)$ şi $F'(x) = f(x)$,
oricare ar fi $x > 0$. .... 2 puncte
Deoarece

$$\left(\frac{F(x)}{x}\right)' = \frac{xf(x) - F(x)}{x^2} \geq 0,$$

oricare ar fi $x > 0$, rezultă că funcţia $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = F(x)/x$, este crescătoare, deci există $\lim\limits_{x\to 0}(F(x)/x) = \ell$. .... 2 puncte
Întrucât f are proprietatea lui Darboux pe intervalul $[0,\infty)$, există un şir (a_n), $a_n > 0$, $a_n \to 0$ şi $f(a_n) \to f(0) = 0$. .... 1 punct
Deoarece $f(a_n) \geq F(a_n)/a_n \geq 0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(F(a_n)/a_n) = 0$, deci $\ell = 0$. Obţinem $\lim\limits_{x\to 0}((F(x) - F(0))/x = 0$, deci $F'(0) = 0 = f(0)$. Prin urmare, F este o primitivă a lui f pe intervalul $[0,\infty)$. .... 2 puncte

Subiectul 2. Conform inegalităţii Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int_0^{1/2} x f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\int_0^{1/2} x^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{1/2}(f'(x))^2\mathrm{d}x\right)$$
$$= \frac{1}{24}\int_0^{1/2}(f'(x))^2\mathrm{d}x,$$
$$\left(\int_{1/2}^{1}(1-x)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\int_{1/2}^{1}(1-x)^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_{1/2}^{1}(f'(x))^2\mathrm{d}x\right)$$
$$= \frac{1}{24}\int_{1/2}^{1}(f'(x))^2\mathrm{d}x,$$ .... 2 puncte

de unde

$$\frac{1}{24}\left(\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x\right) \ge \left(\int_0^{1/2} x f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_{1/2}^{1}(1-x)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$ ... 1 punct

Integrând prin părţi şi folosind condiţia $f(1/2)=0$, obţinem

$$\int_0^{1/2} x f'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^{1/2} f(x)\mathrm{d}x \text{ şi } \int_{1/2}^{1}(1-x)f'(x)\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{1} f(x)\mathrm{d}x.$$ ... 1 punct

Rezultă că

$$\frac{1}{24}\left(\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x\right) \ge \left(\int_0^{1/2} f(x)\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_{1/2}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$
$$\ge \frac{1}{2}\left(\int_0^{1/2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{1/2}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{1} f(x)\mathrm{d}x\right)^2,$$

de unde inegalitatea din enunţ. .... 3 puncte

Subiectul 3. (a) Să presupunem (prin absurd) că există $x \in A^*$ nilpotent. Fie $m \in \mathbb{N}^*$ cel mai mic întreg cu proprietatea $x^m = 0$. Deoarece $x \neq 0$, rezultă $m \ge 2$. Fie $y = x^{m-1}$, deci $y \neq 0$. Atunci $y^2 = x^m x^{m-2} = 0$. Dar $(1-y)^n = 1 - ny = 1$, deci $1 - y = 1$ din ipoteză, adică $y = 0$ — contradicţie. .... 3 puncte

(b) Dacă $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, atunci

$$\{(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) : k \in \mathbb{N}^*\} \subseteq A \times A \times \cdots \times A.$$

Deoarece mulţimea $A \times A \times \cdots \times A$ este finită, rezultă că există $m < k$, astfel încât $x^k = x^m$, oricare ar fi $x \in A$. Fie $m \in \mathbb{N}^*$ minim, pentru care există $k > m$ astfel încât $x^k = x^m$, oricare ar fi $x \in A$. .... 2 puncte

Dacă $m \geq 2$, atunci $(x^{k-1} - x^{m-1})^2 = x^{2k-2} - 2x^{k-1}x^{m-1} + x^{2m-2} = 2x^{2m-2} - 2x^{2m-2} = 0$. Conform punctului (a), obţinem $x^{k-1} = x^{m-1}$, oricare ar fi $x \in A$ — contradicţie. Deci $m = 1$ şi $x^k = x$, oricare ar fi $x \in A$. (În particular, din ultima relaţie rezultă că A este comutativ — conform teoremei lui Jacobson.) .... 2 puncte

Subiectul 4. (a) Fie $a \in G$ un element de ordinul p şi $H = \langle a \rangle = \{e, a, \ldots, a^{p-1}\}$. Notăm cu $I = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, unde $x_1 = a$, un sistem complet de reprezentanţi ai relaţiei de echivalenţă pe G: x este echivalent cu y modulo H dacă $x^{-1}y \in H$. Întrucât $|x_iH| = p$, rezultă că $n = kp$, deci $k = n/p$. Orice endomorfism este perfect determinat de valorile sale pe I: dacă $x \in x_sH$, atunci $x = x_sa^t$, deci $f(x) = f(x_s)f(a)^t$. Prin urmare, $|\mathrm{End}(G)| \leq |G^I| = n^{n/p} = \sqrt[p]{n^n}$. .... 3 puncte

(b) Egalitatea are loc dacă $|\mathrm{End}(G)| = |G^I|$, deci dacă orice funcţie $f : I \to G$ se extinde (ca la punctul (a)) la un endomorfism al lui G. Fie $b \in G$. Deoarece există $f \in \mathrm{End}(G)$ astfel încât $f(a) = b$, rezultă că $b^p = f(a^p) = f(e) = e$, deci $x^p = e$, oricare ar fi $x \in G$. Conform teoremei lui Cauchy, $n = p^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$. De asemenea, dacă $x, y \notin H$ sunt două elemente neechivalente modulo H, atunci oricare ar fi $u, v \in G$, există $f \in \mathrm{End}(G)$ astfel încât $f(x) = u$ şi $f(y) = v$. Dacă $\alpha = 1$, atunci $|G| = p$ şi $G \cong (\mathbb{Z}_p, +)$. În acest caz, egalitatea are loc, deoarece $|\mathrm{End}(\mathbb{Z}_p, +)| = p = \sqrt[p]{p^p}$. Dacă $\alpha \geq 2$, atunci $|I| = p^{\alpha-1} \geq 2$. Deoarece $x_2^{-1} \notin H$, dacă $x_2^{-1} \notin x_2H$, atunci ar exista $f \in \mathrm{End}(G)$ astfel încât $f(x_2) = e$ şi $f(x_2^{-1}) = a$ — contradicţie. Deci $x_2^{-1} \in x_2H$, de unde $x_2^2 \in H$. Pentru p impar, $p = 2m + 1$, am obţine o contradicţie: $x_2^{-1} = (x_2^2)^m \in H$. Deci $p = 2$. În particular, $x^2 = e$, oricare ar fi $x \in G$, i.e. G este abelian. Dacă $\alpha \geq 3$, atunci $|I| \geq 2^2 = 4$. Deoarece x_2x_3 nu aparţine niciuneia dintre clasele H, x_2H, x_3H, rezultă că există $f \in \mathrm{End}(G)$ astfel încât $f(x_2) = f(x_3) = e$ şi $f(x_2x_3) = a$ — contradicţie.

Prin urmare, $\alpha = 2$, $|G| = 4$ şi $x^2 = e$, oricare ar fi $x \in G$, i.e. G este izomorf cu grupul $K = \{e, a, b, ab\}$ al lui Klein. Orice funcţie $f : \{a, b\} \to K$ se extinde la un unic endomorfism, deci $|\mathrm{End}(K)| = 16 = \sqrt[2]{4^4}$ şi inegalitatea de la punctul (a) este egalitate. Prin urmare, grupurile căutate sunt grupurile aditive $\mathbb{Z}_p$, p prim, şi grupul K al lui Klein. .... 4 puncte