

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 13.02.2010
Clasa a XII-a

1. Pe mulțimea $G = (-1-a, 1+a)$, $a > 0$, se definește operația $x * y = \frac{(x+y)(1+a)^2}{xy + (1+a)^2}$.

(4p) a) Arătați că $(G, *)$ formează o structură de grup abelian.

(3p) b) Calculați $\underbrace{\alpha * \alpha * \dots * \alpha}_{n \text{ ori}}$, unde $\alpha = \frac{1+a}{2}$.

Monica Pau

2. (3p) a) Dacă în grupul (G, \cdot) elementele $a, b \in G$ au proprietatea $a \cdot b = b \cdot a$, atunci

$$a^m \cdot b^p = b^p \cdot a^m, \forall m, p \in \mathbb{N}^*.$$

(4p) b) Dacă în grupul (G, \cdot) cu elementul neutru e elementele $x, y \in G$ verifică egalitățile $x^5 = e$ și $y^2 = x \cdot y \cdot x^{-1}$, atunci $y^{31} = e$.

3. Fie mulțimea $F = \{f: [0,1] \rightarrow [0,1] \mid f \text{ continuă pe } [0,1], f(0)=0, f(1)=1\}$ și aplicația

$T: F \rightarrow (0,1)$, dată de relația $T(f) = \int_0^1 f(x) dx$. Demonstrați că:

(4p) a) T este surjectivă pe F .

(3p) b) T nu este injectivă pe F .

Gazeta Matematica

4. (7p) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (ax+b)\sin \lambda x$, $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$. Arătați că există $A(x) = mx+n$ și $B(x) = px+q$, $m, n, p, q \in \mathbb{R}$, astfel încât $\int f(x) dx = A(x) \cdot \sin \lambda x + B(x) \cdot \cos \lambda x + C$, unde $C \in \mathbb{R}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.