

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 13.02.2010
Clasa a XI-a

1. (2p) a) Fie $A \in M_3(R)$ și $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(R)$. Demonstrați că suma elementelor de pe

fiecare linie a matricei A este egală cu 2 dacă și numai dacă $A \cdot U = 2 \cdot U$.

(3p) b) Dacă $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$, $B \in M_3(R)$ are proprietatea că $\sum_{k=1}^3 b_{ik} = \lambda \in R$, $\forall i = \overline{1, 3}$, arătați că suma elementelor de pe fiecare linie a matricei B^n este egală cu λ^n , $\forall n \in N^*$.

(2p) c) Fie $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$, $M \in M_2(R)$, astfel încât $\begin{cases} m_{11} + m_{12} = 5 \\ m_{21} + m_{22} = 5 \end{cases}$. Aflați suma elementelor matricei M^2 .

Liana Agnola

2. (7p) Fie $A \in M_2(C)$, $\text{tr} A = \varepsilon$; $\det A = \varepsilon^2$, unde $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, $n \geq 4$. Arătați că

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon^k \cdot \det(A - \varepsilon^k I_2) = 0.$$

Gazeta Matematică

3. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere reale ce îndeplinește condițiile:

$$(1) \quad x_n^4 - x_n^3 \cdot x_{n+1} \geq x_n^2 - 6x_n + 9, \quad \forall n \in N^*.$$

(5p) a) Dacă presupunem că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este descrescător, arătați că este convergent și calculați limita sa.

(2p) b) Este posibil ca un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ ce verifică relația (1) să aibă toți termenii negativi?

4. (3p) a) Calculați limita: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^2 + 2x) - \ln(e^2 + x)}{x}$.

(4p) b) Determinați valorile lui $a \in R \setminus \{1\}$, astfel încât: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{(a-1)^2 x^2 + 1}} \right)^{x\sqrt{x}} = e^2$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.