

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
FAZA LOCALĂ, 13.02.2010  
Clasa a IX-a

1. Se consideră  $x \in \mathbf{R}$  cu proprietatea că  $x + \frac{1}{x} \in \mathbf{Z}$ . Demonstrați că:

(5p) a)  $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbf{Z}, (\forall) n \in \mathbf{N}^*$ .

(2p) b)  $x^{2010} + \frac{1}{x^{2010}}$  este un număr par.

\*\*\*

2. (7p) Rezolvați în  $\mathbf{R}$  ecuația:

$$25 \{x\}^2 + 1 = 10x.$$

Adriana Pașca

3. Demonstrați inegalitățile :

(5p) a)  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}, (\forall) a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$ .

(2p) b)  $4 \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \right) + ab + ac + bc \geq a^2 + b^2 + c^2 + 6, (\forall) a, b, c \in (0,1)$

Alin Pop

4. (7p) Fie ABC un triunghi și punctele  $M, N$  pe laturile  $[AB]$ , respectiv  $[BC]$ , astfel încât

$$\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n} \text{ și } \frac{BN}{NC} = \frac{n}{p}, \text{ unde } m, n, p \text{ sunt numere reale pozitive cu proprietatea } p^2 = mn.$$

Notăm cu  $P$  intersecția dreptelor  $CM$  și  $AN$ . Arătați că:

$$n \overrightarrow{PA} + m \overrightarrow{PB} + p \overrightarrow{PC} = \vec{0}.$$

\*\*\*

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.