

Barem de corectare OLM Clasa a XII-a

1. a) Se verifică axiomele grupului: (L).....(1p)
 (A), (C).....(1p)
 (N) $e=0$(1p)
 (S) $x' = -x$(1p)

b) $\underbrace{\alpha * \alpha * \dots * \alpha}_{n \text{ ori}} = \frac{3^n - 1}{3^n + 1} (a + 1), \forall n \in N, n \geq 2$, prin inducție matematică.....(3p)

2. a) Inducție după m și p(3p)

b) $y^4 = (xyx^{-1})(xyx^{-1}) = xy^2x^{-1} = x(xy x^{-1})x^{-1} = x^2yx^{-2}$(1p)

$y^8 = x^3yx^{-3}$(1p)

$y^{16} = x^4yx^{-4}$(1p)

$y^{32} = x^4yx^{-4}x^4yx^{-4} = x^4y^2x^4 = x^4xyx^{-1}x^{-4} = x^5yx^{-5} = y$(1p)

3. a) Fie punctele $M(1-\beta, \beta)$, $N(1-\beta, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$ și funcția

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{1-\beta}x, & x \in [0, 1-\beta] \\ \frac{1-\beta}{\beta}x + 2 - \frac{1}{\beta}, & x \in [1-\beta, 1] \end{cases}, \text{ având graficul descris de linia frântă [OMC], iar}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = S_{OMN} + S_{NMCA} = \frac{(1-\beta)\beta}{2} + \frac{(\beta+1)\beta}{2} = \beta; \text{ se deduce că } f \in F \text{.....(3p)}$$

Deci $\forall \beta \in (0, 1), \exists f \in F$, astfel încât $T(f) = \beta$, adică T este surjectivă pe F(1p)

b) Fie funcțiile $f_1: [0, 1] \rightarrow [0, 1], f_1(x) = x$, f_1 continuă pe $[0, 1], \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$, deci $f_1 \in F$ și

$$f_2: [0, 1] \rightarrow [0, 1], f_2(x) = \begin{cases} 4x, & x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ -4x + 2, & x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \\ 2x - 1, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}, f_2 \text{ continuă pe } [0, 1], \int_0^1 f_2(x) dx = \frac{1}{2}, \text{ deci}$$

$f_2 \in F$(2p)

Avem $f_1 \neq f_2$, dar $T(f_1) = T(f_2)$, adică T nu este injectivă pe F(1p)

- 4) Se integrează f prin părți.....(3p)

Se identifică coeficienții.....(4p)