

Barem de corectare OLM Clasa a XI-a

1. a) Calcul direct.....(2p)

b) Cerința $\Leftrightarrow P(n): B^n \cdot U = \lambda^n \cdot U, \forall n \geq 1$.

Etapă de verificare: $n=1, B \cdot U = \lambda \cdot U$ în baza punctului anterior.....(1p)

Etapă de demonstrație:

Din $B^k \cdot U = \lambda^k \cdot U \Rightarrow B^{k+1} \cdot U = B \cdot (B^k \cdot U) = \lambda^k (B \cdot U) = \lambda^k (\lambda \cdot U) = \lambda^{k+1} \cdot U$ (2p)

c) Folosind punctul b), suma elementelor de pe fiecare linie a matricii M^2 este egală cu 25, deci, suma elementelor lui M^2 este 50. (Se poate rezolva și prin calcul direct).....(2p)

2. Notăm $|z_1| = |z_2| = r$ și ținem cont că $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ (1p)

$\det(A - \varepsilon^k I) = a_{11}a_{22} - \varepsilon^k(a_{11} + a_{22}) + \varepsilon^{2k} - a_{12}a_{21} = \det A - \varepsilon^k \text{tr} A + \varepsilon^{2k} = \varepsilon^2 - \varepsilon^{k+1} + \varepsilon^{2k}$. (3p)

$\sum_{k=1}^n \varepsilon^k \det(A - \varepsilon^k I) = \sum_{k=1}^n \varepsilon^{k+2} - \sum_{k=1}^n \varepsilon^{2k+1} + \sum_{k=1}^n \varepsilon^{3k}$ (1p)

$\sum_{k=1}^n \varepsilon^k \det(A - \varepsilon^k I) = \varepsilon^3 \frac{\varepsilon^n - 1}{\varepsilon - 1} - \varepsilon^3 \frac{\varepsilon^{2n} - 1}{\varepsilon^2 - 1} + \varepsilon^3 \frac{\varepsilon^{3n} - 1}{\varepsilon^3 - 1} = 0$, pentru că $\varepsilon^n = 1$ (3p)

3. a) (1) $\Leftrightarrow x_n^3(x_n - x_{n+1}) \geq (x_n - 3)^2 \geq 0, \forall n \geq 1$ (2p)

$x_n \geq x_{n+1} \Rightarrow x_n^3 > 0 \Rightarrow x_n > 0, \forall n \geq 1$ (1p)

$(x_n)_{n \geq 1}$ e mărginit: $0 < x_n \leq x_1, \forall n \geq 1 \Rightarrow (x_n)_{n \geq 1}$ convergent.....(1p)

Dacă $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, din (1) $\Rightarrow (l - 3)^2 \leq 0 \Rightarrow l = 3$ (1p)

b) Presupunând $x_n < 0, \forall n \geq 1$, din (1) $\Rightarrow x_n - x_{n+1} < 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow (x_n)_{n \geq 1}$ convergent. Fie $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$; din (1) $\Rightarrow l = 3$, contradicție pentru că $l \in [x_1, 0]$(2p)

4. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{e^2 + 2x}{e^2 + x} + 1 - 1\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{e^2 + x}\right)}{\frac{x}{e^2 + x}} = 1 \cdot \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e^2}$ (3p)

b) Limita conduce la cazul de nedeterminare 1^∞ și avem:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{x}}{x\sqrt{(a-1)^2 + \frac{1}{x^2}} \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = e^{\frac{1}{2|a-1|}}$ (2p)

Din ipoteză $\Rightarrow \frac{1}{2|a-1|} = 2 \Leftrightarrow |a-1| = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a-1 \in \left\{\pm \frac{1}{4}\right\} \Leftrightarrow a \in \left\{\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right\}$