

Barem de corectare OLM Clasa a X-a

1. $f(2) + f(\sqrt{2}) + f(2^2) = 2009 = f(4) + f(\sqrt{4}) + f(4^2) \dots\dots\dots(3p)$

$f(\sqrt{2}) = f(16) \dots\dots\dots(2p)$

Nu există funcții injective, având imagini egale pentru argumente diferite.....(2p)

2. a) Notăm $|z_1| = |z_2| = r$ și ținem cont că $|z|^2 = z \cdot \bar{z} \dots\dots\dots(1p)$

$|\alpha z_1 + z_2|^2 = (\alpha z_1 + z_2)(\bar{\alpha} \bar{z}_1 + \bar{z}_2) = r^2(1 + \alpha^2) + \alpha(\bar{z}_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = (z_1 + \alpha z_2)(\bar{z}_1 + \alpha \bar{z}_2) = |z_1 + \alpha z_2|^2$
 $\dots\dots\dots(2p)$

b) $n|z_1 + z_2| = |nz_1 + nz_2| = |(n-1)z_1 + z_1 + z_2 + (n-1)z_2| \dots\dots\dots(2p)$

$\leq |(n-1)z_1 + z_2| + |z_1 + (n-1)z_2| = 2|(n-1)z_1 + z_2| \dots\dots\dots(2p)$

Ultima egalitate are loc pe baza punctului a).

3. $\begin{matrix} (m+1)\ln \cos x = \ln \sin x \\ (n+1)\ln \sin x = \ln \cos x \end{matrix} \dots\dots\dots(1p)$

$m = \frac{\ln \sin x}{\ln \cos x} - 1; n = \frac{\ln \cos x}{\ln \sin x} - 1 \dots\dots\dots(1p)$

$m - n = \frac{\ln \sin x}{\ln \cos x} - \frac{\ln \cos x}{\ln \sin x} = \frac{(\ln \sin x - \ln \cos x)(\ln \sin x + \ln \cos x)}{\ln \cos x \cdot \ln \sin x} = \frac{\ln \operatorname{tg} x \cdot \ln \frac{\sin 2x}{2}}{\ln \cos x \cdot \ln \sin x} \dots\dots\dots(1p)$

$\ln \sin x < 0, \ln \cos x < 0, \ln \frac{\sin 2x}{2} < 0 \dots\dots\dots(1p)$

$\ln \operatorname{tg} x > 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x > 1, x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow m < n \dots\dots\dots(1p)$

$\ln \operatorname{tg} x < 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x < 1, x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow m > n \dots\dots\dots(1p)$

$\ln \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1, x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow m = n \dots\dots\dots(1p)$

4. Condițiile care se impun sunt:

$\begin{cases} x \in N \\ 2 \leq x \leq 2008 \\ \frac{2^x - 1}{2^x + 1} > 3^{-x} \end{cases} \dots\dots\dots(2p)$

Se consideră funcția $f: R \rightarrow R, f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x$ care este strict descrescătoare pe intervalul $(1, \infty)$ (2p)

Ultima condiție implică $\left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x < 1$ și este îndeplinită pentru $x \geq 2$ (2p)

Logaritmul are sens pentru $x \in \{2, 3, 4, \dots, 2008\}$ (1p)