

Barem de corectare OLM Clasa a IX-a

1. a) Notăm $a_n = x^n + \frac{1}{x^n}$. Avem $a_1 \in \mathbb{Z}$ și $a_2 = a_1^2 - 2 \in \mathbb{Z}$ (1p)

$a_{n+1} = a_1 a_n - a_{n-1} \quad (\forall) n \geq 2$ (1p)

Demonstrăm prin inducție că $a_n \in \mathbb{Z}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ (3p)

b) caz 1. a_1 par; Se demonstrează prin inducție că $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, a_n par.....(1p)

caz 2. a_1 impar; Se demonstrează prin inducție că $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, a_{3n} par.....(1p)

2. Întrucât $x = [x] + \{x\}$, ecuația devine : $25 \{x\}^2 + 1 = 10\{x\} + 10[x]$ (2p)

$\Leftrightarrow (5\{x\} - 1)^2 = 10[x]$ (1p)

Deoarece $\{x\} \in [0,1)$, rezultă $10[x] \in [0,16)$, de unde $[x] \in \{0,1\}$ (2p)

Dacă $[x] = 0$ rezultă $\{x\} = \frac{1}{5}$ și $x = \frac{1}{5}$ (1p)

Dacă $[x] = 1$ rezultă $\{x\} = \frac{\sqrt{10}+1}{5}$ și $x = \frac{6+\sqrt{10}}{5}$ (1p)

3. a). Cu notațiile $a+b = x$ etc.....(2p)

inegalitatea se reduce la $\sum \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \geq 6$ (2p)

inegalitate adevărată având în vedere inegalitatea mediilor sau: $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq 2$ (1p)

Soluțiile cu ajutorul inegalității lui Cebâșev sau Cauchy-Buniakovski-Schwartz se punctează corespunzător.

b) Inegalitatea este echivalentă cu : $4 \left(\sum \frac{a}{b+c} - \frac{3}{2} \right) - \left(\sum a^2 - \sum ab \right) \geq 0 \Leftrightarrow$

$4 \sum \left(\frac{a}{b+c} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} (2 \sum a^2 - 2 \sum ab) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \sum \frac{2a-b-c}{b+c} - \frac{1}{2} \sum (b-c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$2 \sum \frac{a+b+a+c-2(b+c)}{b+c} - \frac{1}{2} \sum (b-c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \sum \left(\frac{a+b}{a+c} + \frac{a+c}{a+b} - 2 \right) - \frac{1}{2} \sum (b-c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$2 \sum \frac{(b-c)^2}{(a+b)(a+c)} - \frac{1}{2} \sum (b-c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \sum (b-c)^2 \frac{4 - (a+b)(a+c)}{(a+b)(a+c)} \geq 0,$

inegalitate adevărată ținând cont că $a, b, c \in (0,1)$ (2p)

4. Avem $n \overrightarrow{MA} = m \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB}$ (2p)

$n \overrightarrow{PA} + m \overrightarrow{PB} + p \overrightarrow{PC} = n \overrightarrow{PM} + n \overrightarrow{MA} + m \overrightarrow{PM} + m \overrightarrow{MB} + p \overrightarrow{PC} = (m+n) \overrightarrow{PM} + p \overrightarrow{PC}$ (2p)

Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul MBC tăiat de transversala $A-P-N$, obținem:

$\frac{PM}{PC} \cdot \frac{NC}{NB} \cdot \frac{AB}{AM} = 1$, de unde rezultă $\frac{PM}{PC} = \frac{n}{p} \cdot \frac{m}{m+n} = \frac{p}{m+n}$ (2p)

În plus, \overrightarrow{PM} și \overrightarrow{PC} au sensuri opuse, deci $n \overrightarrow{PA} + m \overrightarrow{PB} + p \overrightarrow{PC} = \vec{0}$ (1p)