

Barem de corectare OLM Clasa a VII-a

1. a) Folosind proporții derivate avem:

$$\frac{x-\sqrt{2}}{-\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{x-\sqrt{3}}{-\sqrt{2}+\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{x-\sqrt{2}}{-1} = \frac{x-\sqrt{3}}{1} \Leftrightarrow x-\sqrt{2} = -x+\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} \dots\dots(3p)$$

b) Asemănător avem:

$$\frac{y+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{y^2+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{y+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{y^2+2\sqrt{3}}{\sqrt{18}-\sqrt{12}} \Leftrightarrow \frac{y+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{y^2+2\sqrt{3}}{\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})} \Leftrightarrow$$
$$y+\sqrt{2} = \frac{y^2+2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow y\sqrt{6} = y^2, y \neq 0 \Rightarrow y = \sqrt{6} \dots\dots(3p)$$

c) $2y = 2\sqrt{6} > \sqrt{2} + \sqrt{3} = 2x; \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} < \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 4\sqrt{6} < (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$, care este adevărată, deci $y > x > \frac{y}{x} \dots\dots(1p)$

2. a) Cei 4 pioni situați în colțurile pătratului au câte două posibilități de mișcare, deci în total avem $2 \times 4 = 8$ mutări posibile $\dots\dots(1p)$

Cei 2007×4 pioni situați pe laturile pătratului, exceptând colțurile, au câte trei posibilități de deplasare, deci în total avem $2007 \times 4 \times 3$ mutări posibile $\dots\dots(1p)$

Cei 2007×2007 pioni „centrali” au câte patru posibilități de deplasare, deci în total avem $2007^2 \times 4$ mutări posibile $\dots\dots(1p)$

Numărul maxim de mutări este: $4 \cdot 2007^2 + 12 \cdot 2007 + 8 = 4 \cdot 2008 \cdot 2009 = 16.136.288 \dots\dots(1p)$

b) Considerăm situația cea mai favorabilă în sensul ocupării casuțelor, respectiv mutările prin care liniile 1-2008 comută între ele, două câte două (1 cu 2, 3 cu 4, ..., 2007 cu 2008). Pe linia 2009 realizăm comutări de tipul coloana 1 cu coloana 2, 3 cu 4, ..., 2007 cu 2008. Astfel, pionul de pe linia 2009, coloana 2009 nu mai are cu care alt pion să comute, deci căsuța lui va rămâne liberă după mutarea pionului $\dots\dots(3p)$

3. a) Realizarea corectă a figurii $\dots\dots(1p)$

$APMN$ este paralelogram, deci $2AO = AM \dots\dots(1p)$

Triunghiul BMP este echilateral, deci $[AP] \equiv [MC] \dots\dots(1p)$

$APMC$ este trapez isoscel, deci $[AM] \equiv [PC]$; prin urmare $2AO = PC \dots\dots(1p)$

b) Fie R mijlocul segmentului $[NT]$. Cum O este mijlocul segmentului $[PN] \Rightarrow [OR]$ linie mijlocie în triunghiul PNT , deci $OR \parallel PT \dots\dots(1p)$

$[PS] \equiv [SM]$, deoarece $APMC$ este trapez isoscel, și cum ΔMPO este dreptunghic în $\hat{P} \Rightarrow S$ este mijlocul segmentului $OM \dots\dots(1p)$

În triunghiul MOR avem S mijlocul laturii $[OM]$ și $ST \parallel OR$, deci T va fi mijlocul laturii $[MR] \Rightarrow 3MT = MN$. Deoarece triunghiul MNC este echilateral, $[MN] \equiv [NC]$, deci $3MT = NC \dots\dots(1p)$

4. a) Scriind succesiv teorema lui Thales în triunghiul ABC cu paralelele $MN \parallel BC, MP \parallel AC, PQ \parallel AB$ se obține: $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{PC}{BC} = \frac{QC}{AC} \Rightarrow [AN] \equiv [QC]$, deci punctele N și Q sunt simetrice față de mijlocul laturii $[AC]$(3p)
- b) $\frac{MA}{AB} = \frac{NA}{AC} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow NA = \frac{ak}{k+1}$(2p)
- $NQ = a - \frac{2ak}{k+1} \Rightarrow NQ = \frac{a(1-k)}{1+k}$(1p)
- c) $N = Q \Rightarrow NQ = 0 \Rightarrow k = 1$, deci M este mijlocul lui AB(1p)