

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa finală – Timișoara, 30 aprilie 2008

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, cu proprietatea că pentru orice $x \in (0, \infty)$ șirul $(f(nx))_{n \in \mathbb{N}^*}$ este crescător.

Demonstrați că f este crescătoare.

Subiectul 2. Demonstrați că o matrice inversabilă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are proprietatea $A^{-1} = \overline{A}$, dacă și numai dacă există o matrice inversabilă $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A = B^{-1} \cdot \overline{B}$.

Subiectul 3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe \mathbb{R} pentru care există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \neq f'(c), \quad \text{oricare ar fi } a, b \in \mathbb{R}, a \neq b.$$

Demonstrați că $f''(c) = 0$.

Subiectul 4. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice antisimetrică ($\forall i, j, a_{ij} + a_{ji} = 0$). Demonstrați că pentru orice $x, y \in [0, \infty)$ are loc inegalitatea:

$$\det(A + xI_n) \cdot \det(A + yI_n) \geq \det(A + \sqrt{xy}I_n)^2.$$

Timp de lucru: 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa finală – Timișoara, 30 aprilie 2008

CLASA A XI-A – SOLUȚII

Subiectul 1. Fie $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$ cu $x < y$, atunci există $m, n \in \mathbb{N}^*$ cu $m < n$ și $p \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $x = \frac{m}{p}$ și $y = \frac{n}{p}$. Din enunț, șirul $(f(n \cdot \frac{1}{p}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ este crescător, de unde $f(x) \leq f(y)$ și în consecință f este crescătoare pe \mathbb{Q}_+^* 3 puncte

Pentru $x, y \in (0, \infty)$ cu $x < y$ există șirurile $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(r'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ din \mathbb{Q}_+^* astfel încât $x < r_n < r'_n < y$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r'_n = y$ 2 puncte

Cum f este crescătoare pe \mathbb{Q}_+^* și continuă pe \mathbb{R}_+^* deducem că $f(x) \leq f(y)$ ceea ce implică monotonia funcției pe \mathbb{R}_+^* 2 puncte

Subiectul 2. Dacă $A = B^{-1} \cdot \bar{B}$ atunci

$$A \cdot \bar{A} = B^{-1} \cdot \bar{B} \cdot (\overline{B^{-1}}) \cdot B = B^{-1} \cdot \bar{B}(\bar{B})^{-1} \cdot B = I_n,$$

deci $A^{-1} = \bar{A}$ 2 puncte

Dacă $A^{-1} = \bar{A}$ vom căuta matricea B de forma $B = \alpha \cdot \bar{A} + \beta \cdot I_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 1 punct

Avem:

$$\begin{aligned} A = B^{-1} \cdot \bar{B} &\Leftrightarrow B \cdot A = \bar{B} \Leftrightarrow (\alpha \cdot \bar{A} + \beta \cdot I_n) \cdot A = \bar{\alpha} \cdot A + \bar{\beta} \cdot I_n \\ &\Leftrightarrow \alpha \cdot \bar{A} \cdot A + \beta \cdot A = \bar{\alpha} \cdot A + \bar{\beta} \cdot I_n \Leftrightarrow \alpha \cdot I_n + \beta \cdot A = \bar{\alpha} \cdot A + \bar{\beta} \cdot I_n. \end{aligned}$$

Alegem $\beta = \bar{\alpha}$ și egalitatea este verificată pentru $B = \alpha\bar{A} + \bar{\alpha}I_n$, $\alpha \in \mathbb{C}$ 2 puncte

Să punem condiția ca B să fie inversabilă. Pentru $\alpha \neq 0$, avem:

$$\det B = \det(\alpha\bar{A} + \bar{\alpha}I_n) = \alpha^n \det\left(\bar{A} + \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}I_n\right).$$

Dacă rădăcinile polinomului caracteristic $f_{\bar{A}}(z) = \det(zI_n - \bar{A})$ sunt z_1, z_2, \dots, z_n , alegem $\alpha \in \mathbb{C}^*$ astfel ca $\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \in \mathbb{C} \setminus \{-z_1, -z_2, \dots, -z_n\}$ și atunci $\det B \neq 0$, deci B este inversabilă. 2 puncte

Subiectul 3. Din $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \neq f'(c)$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a \neq b$ deducem că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x \cdot f'(c)$ este injectivă. 3 puncte

Injectivitatea funcției g conduce la stricta monotonie a acestei funcții, de unde $g'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ sau $g'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, adică $f'(x) \geq f'(c), \forall x \in \mathbb{R}$ sau $f'(x) \leq f'(c), \forall x \in \mathbb{R}$ 2 puncte

In consecință c este punct de extrem (global) al funcției f' din interiorul domeniului de definiție și atunci, via teorema lui Fermat $f''(c) = 0$ 2 puncte

Subiectul 4. Fie $P(x) = \det(A + xI_n) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + \det A$ 1 punct

Coeficienții a_k reprezintă suma minorilor diagonali de ordin k ai matricei A , 1 punct
 deci determinanți ai unor matrice antisimetrice. Rezultă că $a_i \geq 0$, pentru orice i 3 puncte

Cu inegalitatea Cauchy–Buniakovski–Schwarz, $P(x) \cdot P(y) \geq P(\sqrt{xy})^2$, oricare ar fi $x, y \geq 0$ 2 puncte