Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa finală – Timişoara, 30 aprilie 2008

CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie triunghiul ABC şi punctele $D \in (BC)$, $E \in (CA)$, $F \in (AB)$, astfel încât

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}.$$

Demonstraţi că, dacă centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor DEF şi ABC coincid, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Subiectul 2. Fie a, b, c trei numere complexe, astfel încât

$$a|bc| + b|ca| + c|ab| = 0.$$

Demonstraţi că

$$|(a-b)(b-c)(c-a)| \geq 3\sqrt{3}|abc|.$$

Subiectul 3. Fie $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2008\}$. Vom spune că o mulţime este de tip r, $r \in \{0, 1, 2\}$, dacă este o submulţime nevidă a lui A şi suma elementelor sale dă restul r la împărţirea cu 3. Notăm cu X_r, $r \in \{0, 1, 2\}$ clasa mulţimilor de tip r.

Determinaţi care dintre clasele X_r, $r \in \{0, 1, 2\}$, este cea mai numeroasă.

Subiectul 4. Considerăm propoziţia $p(n) :\ (n^2+1)|n!,\ n \in \mathbb{N}$. Demonstraţi că mulţimile

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \text{ este adevărată}\} \text{ şi } F = \{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \text{ este falsă}\}$$

sunt infinite.

Timp de lucru: 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii.

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa finală – Timişoara, 30 aprilie 2008

CLASA A X-A – SOLUŢII

Subiectul 1. Considerăm un reper în planul complex, cu originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi notăm cu litere mici afixele punctelor. Dacă $\frac{BD}{DC} = k$, atunci $d = \frac{b+kc}{1+k}$ şi analoagele. ....2 puncte

Pentru ca triunghiul DEF să aibă acelaşi centru al cercului circumscris ca şi $\triangle ABC$ este necesar ca $|d| = |e| = |f|$, adică $d\bar{d} = e\bar{e} = f\bar{f}$. ..2 puncte

Ţinând cont că $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c}$, aceasta revine la $a\bar{b}+b\bar{a} = a\bar{c}+c\bar{a} = b\bar{c}+c\bar{b}$, echivalent cu $|a-b|^2 = |a-c|^2 = |b-c|^2$, de unde concluzia ..... 3 puncte

Subiectul 2. Dacă unul dintre numere este nul, atunci concluzia este evidentă .... 1 punct

În caz contrar, împărţind cu $|abc|$ şi notând $\alpha = \frac{a}{|a|}$, $\beta = \frac{b}{|b|}$, $\gamma = \frac{c}{|c|}$, ipoteza devine $\alpha + \beta + \gamma = 0$ şi $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$. Se ştie că, în acest caz, diferenţele dintre argumentele numerelor α, β, γ sunt $\pm\frac{2\pi}{3}$ .... 3 puncte

Folosind teorema cosinusului rezultă $|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |a|\,|b| \geq 3|a|\,|b|$ şi analoagele, iar prin înmulţirea acestor inegalităţi rezultă concluzia ....3 puncte

Subiectul 3. Adăugăm la X_0 şi mulţimea vidă şi notăm cu $X_{r,n}$ clasele analoage celor din enunţ, obţinute considerând submulţimi ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ renotăm numerele $n+1, n+2, n+3$, cu a, b, c, astfel încât $a \equiv 0 \bmod 3$, $b \equiv 1 \bmod 3$, $c \equiv 2 \bmod 3$. Observăm că $X_{0,n+3}$ este formată din

- mulţimile din $X_{0,n}$;
- mulţimile din $X_{0,n}$, la care adăugăm $\{a\}$, $\{b, c\}$ sau $\{a, b, c\}$;
- mulţimile din $X_{1,n}$, la care adăugăm $\{c\}$, sau $\{a, c\}$;
- mulţimile din $X_{2,n}$, la care adăugăm $\{b\}$, sau $\{a, b\}$.

Raţionând analog şi pentru $X_{1,n+3}$ şi $X_{2,n+3}$ rezultă relaţiile

$$X_{0,n+3} = 4X_{0,n} + 2X_{1,n} + 2X_{2,n}$$
$$X_{1,n+3} = 2X_{0,n} + 4X_{1,n} + 2X_{2,n}$$
$$X_{2,n+3} = 2X_{0,n} + 2X_{1,n} + 4X_{2,n}$$ .... 4 puncte

Cum $|X_{0,1}| = |X_{1,1}| = 1$ şi $|X_{2,1}| = 0$, deducem inductiv că $|X_{0,3n+1}| = |X_{1,3n+1}| > |X_{2,3n+1}|$. Deoarece $2008 = 3 \cdot 669 + 1$ şi $|X_0| = |X_{0,2008}| - 1$ (eliminăm mulţimea vidă), reiese că $|X_1| > |X_0| > |X_2|$. .... 3 puncte

Subiectul 4. Arătăm că, dacă luăm $n = 2m^2$, putem obţine elemente ale mulţimii A, deoarece, în acest caz, $n^2+1 = 4m^4+1 = (2m^2+1)^2-4m^2 = (2m^2-2m+1)(2m^2+2m+1)$, factorii $(2m^2-2m+1)$ şi $(2m^2+2m+1)$ sunt primi între ei iar $(2m^2-2m+1) < 2m^2$. .... 2 puncte
Apoi, dacă $m = 5p+1$, atunci $2m^2+2m+1 = 5(10p^2+6p+1)$, iar pentru $p \not\equiv 0 \bmod 5$, factorii 5, $10p^2+6p+1$ sunt primi între ei şi mai mici decât n. Astfel, $n^2+1|n!$, pentru orice n de forma $2(5p+1)^2$. .... 2 puncte

Apoi, pentru a obţine elemente din F este suficient să găsim un număr prim p şi $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $p|n^2+1$ şi $p > n$. Luând un număr prim p oarecare, dacă acesta are un multiplu de forma m^2+1 şi restul împărţirii lui m la p este n, atunci $n < p$ şi $p|n^2+1$. .... 1 punct
Demonstrăm prin reducere la absurd că mulţimea numerelor prime de acest tip este infinită. Într-adevăr, dacă ar exista doar o mulţime finită $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ de astfel de numere, atunci factorii primi ai numărului $(p_1p_2\ldots p_n)^2+1$ nu ar face parte din P, contradicţie. .... 2 puncte