

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa finală – Timișoara, 30 aprilie 2008
CLASA A IX-A

Subiectul 1. Determinați funcțiile $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ pentru care

$$f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$.

Subiectul 2. a) Arătați că $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{2n}} > n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
b) Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea

$$\min \left\{ k \in \mathbb{N}, k \geq 2; \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} > n \right\} > 2^n.$$

Subiectul 3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și numerele reale $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ cu $|a_i| \leq 1$ și $\sum_{i=1}^n a_i = 0$.

Arătați că $\sum_{i=1}^n |x - a_i| \leq n$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ cu $|x| \leq 1$.

Subiectul 4. Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele $C_1, C_2 \in (AB)$, $B_1, B_2 \in (AC)$, $A_1, A_2 \in (BC)$ astfel încât triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ au același centru de greutate.

Arătați că mulțimile $[A_1B_1] \cap [A_2B_2]$, $[B_1C_1] \cap [B_2C_2]$, $[C_1A_1] \cap [C_2A_2]$ sunt nevide.

Timp de lucru: 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa finală – Timișoara, 30 aprilie 2008

CLASA A IX-A – SOLUȚII

Subiectul 1. Pentru $x = 0$ obținem $f(f(y)) = y$ pentru orice $y \in \mathbb{N}$ ceea ce implică surjectivitatea funcției. 1 punct

Punem $x = 1$ în ecuația funcțională: $f(1 + f(y)) = f(1) + y$ și pentru y înlocuit cu $f(x)$ deducem $f(1 + y) = f(1) + y$ 2 puncte

Prin inducție rezultă din ultima relație $f(n) = nf(1)$ 2 puncte

Cum f este surjectivă obținem $f(1) = 1$ (din relația de mai sus imaginea lui f este $f(1)\mathbb{N} = \{f(1)n \mid n \in \mathbb{N}\}$). 2 puncte

Subiectul 2. a) $\frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \dots + (\frac{1}{2^{2n-1}+1} + \frac{1}{2^{2n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^{2n}}) > \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \dots + \frac{2^{2n-1}}{2^{2n}} = 2n \cdot \frac{1}{2} = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ 2 puncte

b) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ mulțimea $\{k \in \mathbb{N}, k \geq 2; \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} > n\}$ este nevidă (cf. a)) și, fiind formată din numere naturale, admite un minim; fie acesta x_n 1 punct

Demonstrăm că $x_n > 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, prin inducție matematică:

- Pentru $n = 1$, avem: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1$ și $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$, deci $x_1 = 4 > 2^1$.
- Presupunem că $x_n > 2^n$ pentru un $n \geq 1$.

Deoarece $x_n > 2^n$, rezultă $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} \leq n$.

Cum $\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{2^n}{2^{n+1}} < 1, \forall n \geq 2$, prin adunare obținem $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} < n + 1$, de unde $x_{n+1} > 2^{n+1}$ 4 puncte

Subiectul 3. Putem presupune că $a_0 = -1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq 1 = a_{n+1}$ 1 punct

Deoarece $|x| \leq 1$, există $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $a_k \leq x \leq a_{k+1}$. Atunci

$$E(x) = \sum_{i=1}^n |x - a_i| = kx - \sum_{i=1}^k a_i + \sum_{j=k+1}^n a_j - (n - k)x. \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

Dar $2k \leq n$, avem

$$E(x) = -nx + 2 \sum_{i=1}^k (x - a_i) = n - \left(n(1 + x) - 2 \sum_{i=1}^k (x - a_i) \right).$$

Dacă $1 + x \leq 0$, iar $2 \sum_{i=1}^k (x - a_i) \leq 2 \sum_{i=1}^k (1 + x) = 2k(1 + x)$, deci $E(x) \leq n - (n - 2k)(1 + x) \leq n$ 2 puncte

Analog se procedează dacă $2k \geq n$:

$$\begin{aligned} E(x) &= nx + 2 \sum_{j=k+1}^n (a_j - x) = n - \left(n(1 - x) - 2 \sum_{j=k+1}^n (a_j - x) \right) \\ &\leq n - (2k - n)(1 - x) \leq n. \dots\dots\dots 2 \text{ puncte} \end{aligned}$$

Se observă de altfel că $E(-1) = E(1) = n$.

Soluție alternativă. Se poate verifica ușor că $E(x)$ este o “parabolă” convexă, liniară pe bucăți, astfel încât maximum se obține la extreme, unde $E(-1) = E(1) = n$.

Subiectul 4. Deoarece $\triangle A_1B_1C_1$ și $\triangle A_2B_2C_2$ au același centru de greutate, rezultă

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = \vec{0}. \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Cum $A_1, A_2 \in (BC)$, $B_1, B_2 \in (CA)$, $C_1, C_2 \in (AB)$, există $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{A_1A_2} = \alpha \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{B_1B_2} = \beta \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{C_1C_2} = \gamma \overrightarrow{AB}$ 1 punct

Obținem $\alpha \overrightarrow{BC} + \beta \overrightarrow{CA} + \gamma \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{BC} + \beta \overrightarrow{CA} - \gamma(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha - \gamma) \overrightarrow{BC} = (\gamma - \beta) \overrightarrow{CA}$. Dar vectorii \overrightarrow{BC} și \overrightarrow{CA} sunt necoliniari, deci

$$(*) \quad \alpha = \beta = \gamma. \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

Presupunem că $C_1 \in (AC_2)$. Din relația (*) rezultă: $A_1 \in (BA_2)$ și $B_1 \in (CB_2)$, de unde obținem concluzia. 2 puncte